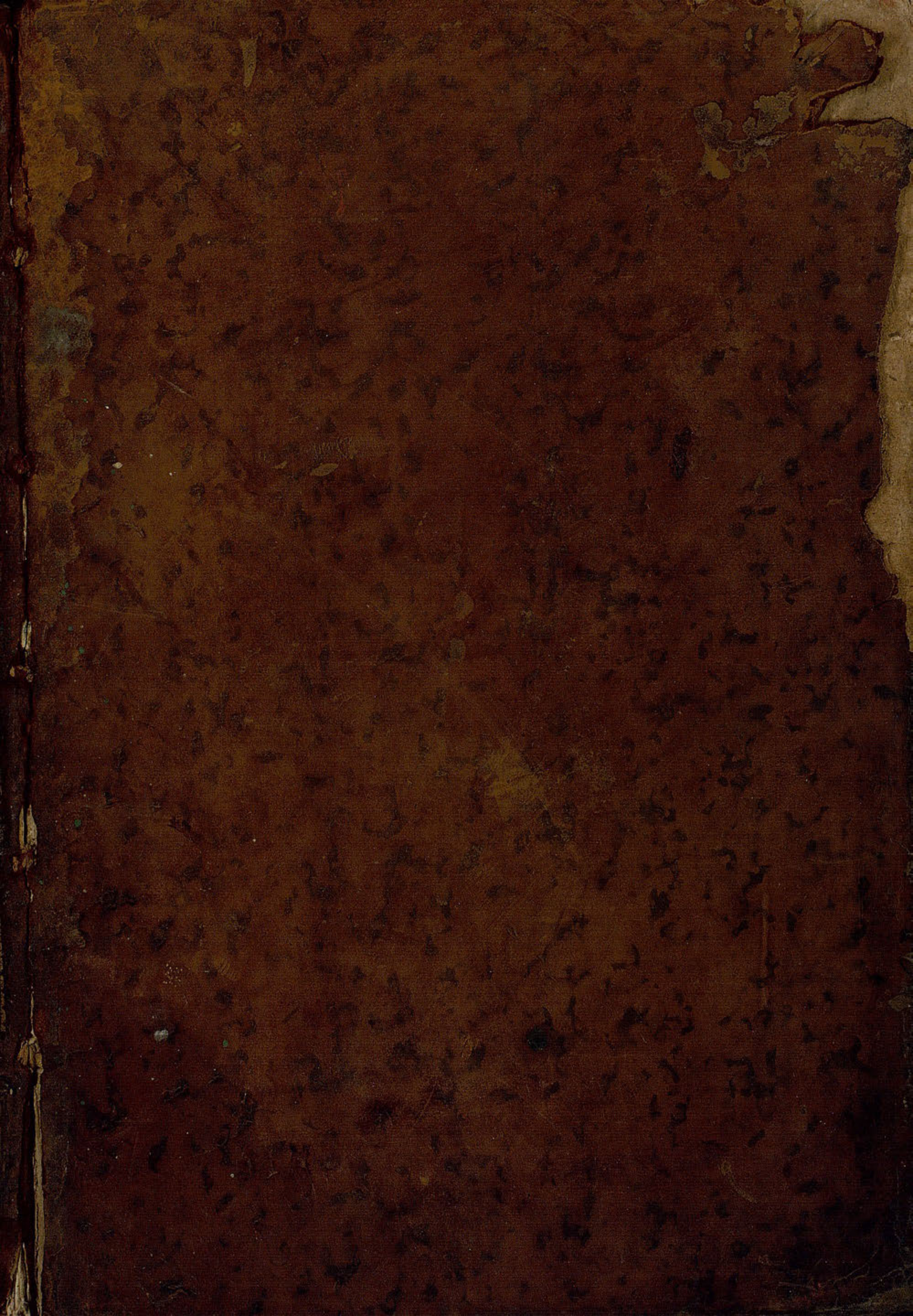



EX BIBLIOTECÂ
D. A. de VLLOA



INSTITUZIONI ANALITICHE

AD USO

DELLA GIOVENTU' ITALIANA

DI D.NA MARIA GAETANA AGNESI

MILANESE

Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.

TOMO I.



IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ALLA
SACRA CESAREA REALE MAESTÀ
DELL'
AUGUSTISSIMA IMPERATRICE

MARIA TERESA
D'AUSTRIA

REGINA D'ONGARIA E DI BOEMIA
ec. ec. ec.



Ra quanti pensieri ó io ravvolto nell' animo per sollevarmi a sperare, che Voi poteste, SACRA CESAREA REAL MAESTA', *con estrema degnazione accogliere quest' opera mia, che va superba del Vostro Augustissimo Nome, e de' Vostri Fortunatis-*

ſimi Auſpicj, un ſolo mi conforta, ed è queſto la conſiderazione del Voſtro Seſſo, che da VOI *illuſtrato per bella ſorte è pur mio. Queſto penſiero mi á ſoſtenuta nella fatica, e non mi á laſciato ſentire il riſchio dell' impreſa; e veramente ſe in qualche tempo poteva giuſtificarſi l'ardimento di una Donna, che tentaſſe ſeguire i rapidi voli di una Scienza, che ſpazia mai ſempre negli Infiniti, in quel tempo eſſere ciò doveva, nel quale regna una* DONNA, *e regna con univerſale ammirazione. Parmi in fatti, che in queſta età, che fra tutte le venture chiara, ed altera avrà da* VOI *il nome, debbano le Donne tutte ſervire alla gloria del loro ſeſſo, e ciaſcuna, per quanto le può venir fatto, contribuire all' accreſcimento dello Splendore, nel quale* VOI *lo avvolgete;* VOI, *che ſparſo avendo d'ogn' intorno alta maraviglia di Voſtre Azioni, coſtringete gli Uomini a dir di* VOI *con più ragione, che non fu detto di alcuno degli antichi Ceſari, che colla Giuſtizia, e*

Cle-

Clemenza dell' Imperio onorate l'umana natura, e rappreſentate la divina. Laſcio a quelle, che geloſe delle glorie del noſtro ſeſſo conſerveranno a Poſteri le Voſtre Geſta, l'eſprimere, come all' eſimia bellezza del corpo rimirinſi in VOI accoppiate ad una, ad una tutte le virtù, e ſopra tutto laſcio loro il celebrare la forza del voſtro Ingegno, l'Incomparabile Voſtro Valore, l'ampia Voſtra Sufficienza, e quella invitta Coſtanza, che riſtorata, dirò così, dalle ſteſſe ſventure, e da pericoli ſteſſi, le coſe Voſtre nel principio del regno da nemico Fato travagliate, e quaſi oppreſſe ritornò liete, e felici. Non ſi rimarranno eſſe pure di far conoſcere la dolcezza de' Voſtri coſtumi, l'Umanità Voſtra, e la generoſa Attenzione, colla quale fra lo ſtrepito ancora, e il tumulto dell'armi proteggete, e ravvivate gli ſtudj, e l'arti, onde ſi nutre il pubblico bene, e ſi accendono utilmente gli animi degli Uomini. Sin da primi anni occuparono le Scienze la Voſtra

Mente, e nissuna fra queste è a VOI *straniera. Vi á ora da quelle distolto la cura de' Popoli, ed è sembrato poco al Cielo, che foste la più dotta del Vostro Secolo. Ma non è in* VOI *però men fervido l'amore del Vero, e perciò chi lo ricerca sommamente distinguete, e favorite. Degnatevi adunque,* SACRA CESAREA REAL MAESTA', *clementissimamente riguardare questa mia fatica, e come opera, che in se raccoglie tutti i più luminosi progressi dell' Intelletto umano, e come quel tributo, che per me poteva offrirsi maggiore alla gloria del Vostro Regno, che non per altro par, che richiami la memoria delle Eroine, che altrove regnarono, che per maggiormente al confronto esaltare la* MAGNANIMITA', PRUDENZA, E FORTUNA VOSTRA; *e se il Musico Volume, che la Sorella mia á avuto l'onore di presentarvi, è stato tanto avventuroso di sciogliere al canto la Vostra Voce, abbia questo la sospirata sorte di addoprare alcuna volta la Vostra Penetrazione,*

zione, e Sagacità. Altro non rimanendomi, che d'implorarvi dal Cielo lunghissima Vita, onde deriverà la stabile felicità di tante a VOI *soggette Nazioni, al Vostro Trono umilissimamente mi prostro*

DELLA S. C. R. MAESTA' VOSTRA

Umilissima, obbedientissima, fedelissima Serva, e Suddita
Maria Gaetana Agnesi.

AL LETTORE.



On avvi alcuno, il quale informato eſſendo delle Matematiche coſe, non ſappia altresì quanto, in oggi ſpezialmente, ſia neceſſario lo ſtudio dell'Analiſi, e quali progreſſi ſi ſieno con queſta fatti, ſi facciano tuttora, e poſſano ſperarſi nell'avvenire; che però non voglio, nè debbo trattenermi qui in lodando quella ſcienza, che punto non ne abbiſogna, e molto meno da me. Ma quanto è chiara la neceſſità di lei, onde la Gioventù ardentemente s'invoglj di farne acquiſto, grandi altrettanto ſono le difficoltà, che vi s'incontrano, ſendo noto, e fuor di dubbio, che non ogni Città, almeno nella noſtra Italia, â perſone, che ſappiano, o vogliano inſegnarla, e non tutti ânno il modo di andar fuori della Patria a cercar-

ne i Maeſtri. Io lo ſo per prova, ed ingenuamente il confeſſo, mentre con tutto lo ſtudio, ch'io mi ſono sforzata di fare da me medeſima ſoſtenuto dalla più forte inclinazione per queſta ſcienza, mi troverei tuttavia intricata nel gran labirinto d'inſuperabili difficoltà, ſe tratta non me n'aveſſe la ſicura guida, e ſaggia direzione del dottiſſimo Padre Don Ramiro Rampinelli Monaco Olivetano ora Profeſſore di Matematica nella Regia Univerſità di Pavia, a cui mi riconoſco altamente debitrice di tutti que' progreſſi (quali eſſi ſieno) de' quali è ſtato capace il mio picciol talento, le di cui lodi io tralaſcio come ſuperflue ad un Soggetto sì celebre, e ſpezialmente per non offendere la nota, e forſe troppo rigida di lui modeſtia. Al ſopraccennato incomodo poſſono rimediare, non v'â dubbio, in parte i buoni libri, quando eſſi ſieno con quella chiarezza, che baſta ſcritti, e con quel metodo, che pur troppo è neceſſario; quindi è, che quantunque le coſe Analitiche ſieno tutte pubblicate con le ſtampe, pure perchè eſſe ſono ſcollegate, ſenz' ordine, e ſparſe quà, e là nell' opere di molti Autori, e principalmente negli Atti di Lipſia, nelle Memorie dell' Accademia di Parigi, ed in altri Giornali, coſicchè non potrebbe certamente un Principiante ridurre a metodo le materie, quando anche egli foſſe di tutti i libri fornito, pensò il rinomato Padre Renau al comune vantaggio, e die-

de

de alla luce l'utiliſſimo libro *de L'Analiſe demontrée*, opera degna di tutte quelle lodi, che maggiori ſi poſſono. Dopo di che ſembrerà forſe affatto inutile, che compariſcano queſte mie Inſtituzioni, avendo altri già da molto tempo così largamente proveduto all' altrui biſogno. Ma ſu queſto punto io prego il corteſe Lettore a riflettere, che creſcendo le ſcienze di giorno in giorno, dopo l'edizione del lodato libro moltiſſimi, ed importantiſſimi ſono ſtati i nuovi ritrovamenti inſeriti dai loro Autori in diverſe opere, come era ſucceduto degli anteriori; quindi per iſcemare agli Studioſi la fatica di andare fra tanti libri ripeſcando i metodi di recente invenzione, mi ſembravano utiliſſime, e neceſſarie nuove Inſtituzioni di Analiſi. Le nuove ſcoperte m'ânno obbligata ad un'altra diſpoſizione di coſe, e ben ſa chi pon mano in sì fatte materie, quanto ſia difficile il ritrovare quella, che ſia dotata della dovuta chiarezza, e ſemplicità, omettendo tutto il ſuperfluo, ſenza laſciare coſa alcuna, che eſſer poſſa utile o neceſſaria, e che proceda con quell'ordine naturale, in cui forſe conſiſte la miglior iſtruzione, ed il maggior lume. Queſto naturale ordine io ô certamente ſempre avuto in viſta, e l'ô ſommamente procurato, ma non ſo poi ſe ſarò ſtata baſtantemente fortunata per conſeguirlo.

Nell' atto poi di maneggiare varj metodi, mi si sono parate alla mente alcune estensioni, e parecchie diverse cose, le quali per avventura, non saranno prive di novità, e d'invenzione: a queste darà il benigno Lettore quel peso, che a lui sembrerà, non intendendo io di raccoglier lodi, contenta di essermi con sodo, e vero piacere divertita, e di aver procurato di giovare altrui.

Nel Tomo secondo per entro il Calcolo Integrale ritroverà il Lettore un Metodo affatto nuovo per li Polinomj, nè in luogo alcuno prodotto; questo è del celebre, e non mai abbastanza lodato Signor Conte Jacopo Riccati Cavaliere di singolarissimo merito nelle scienze tutte, e ben noto al mondo letterario. 'A egli voluto fare a me quella grazia nel comunicarmelo, che io non meritava, ed io rendo a lui, ed al Pubblico quella giustizia, che si conviene.

Finalmente, siccome non è stata mia mente da principio il pubblicar colle stampe la presente opera da me cominciata, e proseguita in Lingua Italiana per mio particolar divertimento, o al più per istruzione d'alcuno de' miei minori fratelli, che inclinato fosse alle matematiche facoltà, nè essendomi determinata di darla al Pubblico, che dopo di esser già molto avvanzata l'opera, e pervenuta a considerabile volu-

me;

me; mi sono perciò dispensata dal tradurla in Latino Idioma (comecchè da alcuni credasi più convenire a tal materia) sì per l'autorevole esempio di tanti celebri Matematici Oltramontani, ed Italiani ancora, le di cui opere nella loro natìa favella vanno a comune vantaggio stampate, sì pel naturale mio rincrescimento alla materiale fatica di trascrivere in Latino ciò, che aveva di già scritto in Italiano. Nè intendo però farmi carico di quella purità di lingua, che lodevolmente viene praticata in materie da questa diverse, avendo io avuto in mira più, che ogni altra cosa, la necessaria possibile chiarezza.

Die 26. Novembris 1748.

IMPRIMATUR.

Fr. H. Todeschini Inquisitor Generalis Mediolani.

F. Curionus Archipresbyter S. Eusebii pro Eminentiss. & Reverendiss. D. D. Card. Archiepiscopo.

Vidit Julius Caesar Bersanus pro Excellentiss. Senatu.

INDICE DE' CAPI
DI TUTTA L'OPERA
TOMO I.
LIBRO PRIMO
Dell' Analisi delle Quantità finite.

TOMO II.

LIBRO SECONDO

Del Calcolo Differenziale.

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverſo delle Tangenti.



INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO PRIMO

Dell' Analisi delle Quantità finite.



L'Analisi delle quantità finite, che comunemente chiamasi Algebra Cartesiana, è un metodo, con cui trattando quantità finite si sciolgono i Problemi; cioè da certe quantità, e condizioni date e cognite, si viene in cognizione d'altre incognite, e che si cercano, per mezzo di alcune operazioni, e metodi, che parte a parte mi propongo di spiegare ne' seguenti Capi.

CAPO I.

Delle primarie Notizie, ed Operazioni dell' Analisi delle Quantità finite.

1. LE primarie operazioni di quest' Algebra sono le stesse dell' Aritmetica comune, cioè la Somma, la Sottrazione, la Moltiplicazione, la Divisione, e l'Estrazione delle Radici; ma con questa differenza, che nell' Aritmetica comune si adoprano i numeri, ed in questa le specie, o sia le lettere dell' Alfabeto, con le quali si denominano, e si calcolano le quantità in astratto, di qual sorta esse siano, geometriche, o fisiche, come Linee, Superficie, Corpi, Forze, Resistenze, Velocità ec.; e però questa tal sorta di Aritmetica chiamasi Algoritmo delle quantità, o Aritmetica speciosa; ed è ben questa molto più eccellente di quella, tutto che le operazioni sieno le stesse, si perchè queste quantità non si confondono tra loro nelle operazioni, come le numeriche, si ancora perchè con la stessa facilità si trattano nel calcolo le quantità note, e le incognite; e finalmente perchè le dimostrazioni analitiche sono generali, ed a qualunque caso applicabili, la dove le aritmetiche sono particolarissime, ed in ogni diverso caso è necessaria una nuova dimostrazione.

2. Ma delle Quantità altre sono positive, cioè maggiori del nulla, altre minori del nulla, e però negative.

Per

Per cagion d'esempio: I Beni, che si posseggono, sono positivi, ma quelli, che ad altri si debbono, sono negativi, perchè dai positivi s'hanno a sottrarre, e ne diminuiscono la somma, e però siccome sono quantità positive i Capitali, che uno abbia, così sono quantità negative i Debiti. Similmente se un Mobile diretto verso uno scopo, o meta del suo viaggio descriva uno spazio, sarà questo spazio positivo; ma se si porterà verso la opposta parte, descriverà uno spazio, che relativamente alla meta, verso cui doveva andare, sarà negativo. Quindi in Geometria se una linea condotta da una parte si assuma per positiva (il che è arbitrario) sarà negativa la linea condotta verso la parte opposta.

3. Le quantità positive si distinguono in algebra dalle negative per mezzo di certi segni a loro prefissi; alle positive si prefigge il segno $+$, che dicesi *più*, alle negative il segno $-$, che dicesi *meno*; e quando una quantità, che o sia posta sola, o in una serie di altre sia la prima, non abbia prefisso segno alcuno, s'intende sempre affetta dal segno positivo. Il segno $\pm$, a cui è contrario l'altro $\mp$, è segno ambiguo, e significa il più ed il meno, cioè il positivo ed il negativo, di modo che, per esempio, $\pm a$ vorrà dire, che la quantità a si può assumere e positiva, e negativa. Il segno $=$ significa eguaglianza, e però $a=b$ vorrà dire, che a sia eguale a b; siccome $a > b$ significa, che a sia maggiore di b, ed $a < b$, che a sia minore di b. L'eguaglianza poi delle ragioni, cioè la

proporzione geometrica di tre, o quattro quantità si esprimerà così $a, b :: b, c$ se saranno tre, e vorrà dire, che la ragione di a alla b è eguale a quella di b alla c; ed $a, b :: c, d$ vorrà dire, che a è alla b, come c a d. Finalmente il segno ∞ significa l'infinito, e però $a = \infty$ significherà, che a sia eguale all'infinito, cioè che sia quantità infinita.

4. Quantità semplice, incomplessa, o di un sol termine è quella, che è espressa da una, o più lettere, ma tra loro non distinte e separate da segno alcuno, come a, ab, aac ec., così all'opposto è quantità composta e di più termini quella, che è espressa da più lettere tra loro separate da' segni, come $a + b$, $aa - ff + hh$, ec.; e però $a + b$ sarà di due termini, $aa - ff + hh$ di tre, ec.

Della Somma delle Quantità semplici intiere.

5. Le quantità semplici si sommano tra loro con lo scrivere una dopo l'altra, lasciando a ciascuna di loro quel segno, che hanno. Abbiasi da sommare a con b con c, sarà la somma $a + b + c$; abbiasi da sommare a con $- b$, sarà la somma $a - b$; abbiasi da sommare a con a con b con b, sarà la somma $a + a + b + b$; ma quì avvertasi, che $a + a$ è lo stesso che $2a$, e $b + b$ è lo stesso che $2b$; e però la somma sarà $2a + 2b$. Quindi per sommare le quantità espresse dalle medesime lettere, basterà alla stessa lettera prefiggere tal numero, che contenga tante unità, quante volte essa è posta; e però la somma di ac con ac con ac,

cioè

cioè $ac + ac + ac$ farà $3ac$, e questo numero si chiama coefficiente numerico. Che se le quantità da sommarsi dalle stesse lettere denominate averanno in oltre coefficienti numerici, si sommino essi coefficienti con la regola ordinaria dell'aritmetica; così la somma di $2a$ con $5a$ con b con $4b$ sarà $7a + 5b$; così la somma di a con $3b$ con $- 2c$ con $7c$ con $5a$ sarà $a + 3b - 2c + 7c + 5a$, ma $a + 5a$ fanno $6a$, e $- 2c + 7c$ fanno $5c$, dunque la somma sarà $6a + 3b + 5c$.

Della Sottrazione delle Quantità semplici intere.

6. Per sottrarre una quantità da un'altra si muta il segno a quella, che si deve sottrarre, e col segno mutato si scrive presso l'altra. Per sottrarre b da a si scriva $a - b$; dove avvertasi, che se a sarà quantità maggiore di b, il residuo della sottrazione, cioè la differenza sarà positiva; e se b sarà maggiore di a, essa differenza sarà negativa. Per sottrarre aff da bbc, si faccia $bbc - aff$; per sottrarre $2a$ da $5a$, si faccia $5a - 2a$; ma cinque a meno due a fanno tre a, adunque il residuo sarà $3a$; per sottrarre $- b$ da a, si scriva $a + b$. Nè paja strano, che nel sottrarre $- b$ quantità negativa essa divenga positiva, onde il residuo sia $a + b$; imperciocchè il sottrarre una quantità da un'altra è lo stesso, che il cercare la differenza tra esse quantità; ora la differenza tra a, e $- b$ è appunto $a + b$ in quella guisa, che la differenza tra un capitale di cento scudi e un debito di cinquanta è cento cinquanta; perchè dall'avere

cento

cento all'avere nulla v'è differenza di cento, e dall'avere nulla all'avere cinquanta di debito vi è cinquanta di differenza; adunque dal capitale di cento al debito di cinquanta vi sarà differenza di cento cinquanta. Così, per la stessa ragione, a sottrarre b da $-a$ si scrive $-a-b$; e per sottrare $-b$ da $-a$ si scrive $-a+b$.

Della Moltiplicazione delle Quantità semplici intere.

7. Le quantità semplici si moltiplicano con lo scrivere l'una unitamente all'altra senza alcun segno frapposto, e ciò che risulta chiamasi il prodotto, siccome chiamansi i moltiplicatori le quantità, che tra loro si moltiplicano. Ma intorno al segno, che devesi prefiggere ad essi prodotti, è regola generale, che se le quantità moltiplicantesi sono ambe positive, o ambe negative, al prodotto si prefigge sempre il segno positivo; se una di esse, qualunque siasi, è positiva, l'altra negativa, al prodotto si prefigge sempre il segno negativo. La ragione di ciò è, che la moltiplicazione altro non è, che una proporzione geometrica, il di cui primo termine sia l'unità; il secondo, e terzo termine le due quantità, che devonsi moltiplicare; ed il quarto il prodotto, e per tanto posti in serie l'unità per primo termine, l'uno de' moltiplicatori per secondo, l'altro moltiplicatore per terzo; poichè il quarto, per la natura della proporzione geometrica, deve essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo; se il secondo, e terzo termine sono positivi, cioè se, per esem-

esempio, è 1, a :: b, al quarto, essendo l'unità, cioè il primo positivo, dovrà pure essere positivo il quarto. Sia negativo il secondo, e positivo il terzo, cioè sia 1, $-a$ :: b, al quarto; dovendo il quarto essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo, ed essendo negativo il secondo, dovrà pure il quarto essere negativo. Sia positivo il secondo, negativo il terzo, cioè sia 1, a :: $-b$, al quarto; dovendo il quarto essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo, ed essendo il secondo, ed il primo positivi, ed il terzo negativo, non potrà il quarto essere se non negativo. Sieno finalmente il secondo, ed il terzo negativi, cioè sia 1, $-a$ :: $-b$, al quarto; essendo il secondo moltiplo negativo del primo, bisognerà che il quarto sia moltiplo negativo del terzo; ma il terzo è negativo, dunque dovrà il quarto essere positivo. Adunque il prodotto di a in b sarà ab; quello di a in $-b$ sarà $-ab$; di $-a$ in b sarà pure $-ab$; di $-a$ in $-b$ sarà ab; di a in b in c sarà abc; di a in $-b$ in c sarà $-abc$, perchè a in $-b$ darà $-ab$, e $-ab$ in c darà $-abc$; ed il prodotto di $-a$ in $-b$ in c sarà abc.

Se le quantità da moltiplicarsi avessero dei coefficienti numerici, si moltiplicano essi coefficienti con la solita regola de' numeri, ed il prodotto si prefigge al prodotto delle lettere; onde il prodotto di $6a$ in $-8bc$ sarà $-48abc$; il prodotto di $2a$ in $-2b$ in $-3c$ sarà $12abc$, e così degl' altri ec.

8. Ora poichè il prodotto di a in a è aa; di a in a in a,

o di

o di *aa* in *a* è *aaa*; di *a* in *a* in *a* in *a*, o sia di *aaa* in *a* è *aaaa*, e così successivamente; per non replicare tante volte la medesima lettera si suole scrivere a^2 in luogo di *aa*, a^3 in luogo di *aaa*, a^4 in luogo di *aaaa*, e così degl'altri; cioè scrivendo sopra la lettera tal numero, che contenga tante unità, quante volte dovrebbe essere replicata essa lettera, e tale numero si chiama l'esponente; si suole però scrivere indifferentemente tanto *aa*, quanto a^2; non così di prodotto maggiore.

9. Comecchè il prodotto di un numero moltiplicato in se stesso si chiama il quadrato di quel numero, o sia la seconda potestà, e se questo prodotto di nuovo si moltiplica nello stesso numero, il nuovo prodotto si chiama il cubo, o la terza potestà dello stesso numero, ed il prodotto del cubo nel numero si chiama il quadrato quadrato, o la quarta potestà, e così successivamente; così pure *a* moltiplicato in *a*, cioè *aa* si chiama il quadrato di *a*, o la seconda potestà di *a*, a^3 il cubo, o terza potestà, a^4 la quarta ec. Sarà dunque assai diverso $2a$ da a^2, essendo il primo la somma di *a* con *a*, cioè $a+a$, ed il secondo il quadrato di *a*, e così si dica di $3a$ ed a^3, di $4a$ ed a^4 ec. Ma poichè il prodotto di + con +, e di − con − è sempre positivo, ne viene, che tanto il quadrato di *a*, quanto di $-a$ sarà sempre *aa* quantità positiva; all'opposto il cubo di *a* sarà bensì positivo, ma sarà negativo, cioè $-a^3$ il cubo di $-a$, perchè $-a$ in $-a$ fa *aa*, ed *aa* in $-a$ fa $-a^3$. Così sarà positiva la quarta potestà tanto di *a*, quanto di

$-a$;

$-a$; e generalmente quando l'esponente della potestà, a cui si vuole elevare la data quantità, sia numero pari, o sia positiva, o sia negativa la quantità, ciò che risulta sarà sempre positivo; e quando l'esponente sia dispari, se la quantità è positiva, ciò che risulta sarà positivo, e sarà negativo quando la quantità sia negativa.

Della Divisione delle Quantità semplici intere.

10. La divisione è un'operazione opposta alla moltiplicazione, e ciò, che questa compone, quella risolve; poichè ab è il prodotto di a in b, così dividendo ab per a si avrà b, e dividendo per b si avrà a; dividendo abc per bc avrassi a, e dividendo per a avrassi bc, e dividendo per c avrassi ab ec. La quantità da dividersi si chiama il dividendo; quella, per cui si divide, si chiama il divisore; e ciò, che risulta dalla divisione, dicesi il quoziente. Adunque ogni qualvolta nel dividendo, e nel divisore vi sono le stesse quantità, si tolgano esse in quel modo, in cui sono nel divisore, dal dividendo cancellandole; e ciò, che rimane, sarà il quoziente, quindi se si divida aa per a, il quoziente sarà a; se si divida a^3 per a, il quoziente sarà aa; se si divida $a^3 b^3$ per $aa\,bb$, il quoziente sarà ab; che se in oltre il dividendo, e divisore avessero coefficienti numerici, si dividano essi con la regola ordinaria dell'aritmetica, ed il quoziente numerico si prefigga al quoziente letterale, e però dividendo $3a^3 b^3$ per $3b^3$, il quoziente sarà a^3; dividendo $56aab^3$ per $8ab$, il quoziente sarà $7abb$; e quì notisi,

che qualora la quantità da dividersi sia la stessa del divisore, come sarebbe a dividere b per b, $7a^3$ per $7a^3$ ec., il quoziente è l'unità; e la ragione è chiara, perchè il dividere è il ricercare quante volte il divisore entri ovvero sia nel dividendo.

11. Quando poi il dividendo, e divisore non abbiano quantità o lettera comune, per cui possa farsi la divisione nel modo suddetto, come sarebbe a dividere a per b, a^3 per bc, $5aabb$ per $2cc$ ec., si scrivono così $\frac{a}{b}$, $\frac{a^3}{bc}$, $\frac{5aabb}{2cc}$ ec., cioè il dividendo al di sopra, ed il divisore al di sotto d'una lineetta, e si intende, che a debbasi dividere per b, a^3 per bc ec., e queste chiamansi frazioni; la quantità poi sopra la lineetta dicesi il Numeratore, quella di sotto il Denominatore. Che se alcune delle lettere del divisore, ma non tutte, fossero comuni con la quantità da dividersi, si tolgano le comuni dall'uno, e dall'altra, e del rimanente se ne formi una frazione; così dividendo a^3bb per $5abcc$, sarà il quoziente $\frac{a^2b}{5cc}$; dividendo $10ab^3$ per $15bcc$, sarà il quoziente $\frac{2abb}{3cc}$ ec.

12. Ma perchè può essere positivo, o negativo ed il dividendo, ed il divisore, è necessario in ciascuna combinazione de' casi fissare la regola per lo segno da prefiggersi al quoziente. Questa è la stessa di quella, che serve per la moltiplicazione, vale a dire, che se il dividendo, ed il divisore averanno ambi il medesimo segno positivo, o negativo,

tivo, il quoziente ſarà ſempre poſitivo, e ſe averanno ſegni contrarj, il quoziente ſarà negativo. La dimoſtrazione dipende da quella de' ſegni della moltiplicazione; imperciocchè ſiccome la moltiplicazione è una proporzione, il di cui primo termine ſia l'unità; il ſecondo, ed il terzo i due moltiplicatori; ed il quarto il prodotto; così la diviſione è la ſteſſa proporzione, ma inverſa, il di cui primo termine è il dividendo; il ſecondo il diviſore; il terzo il quoziente; ed il quarto l'unità. Abbiaſi da dividere $\pm\ ab$ per $\pm\ b$, ſarà dunque la proporzione $\pm\ ab$, $\pm\ b$:. $*a$, 1 (pongo al terzo termine, cioè al quoziente il ſegno $*$, non ſapendoſi per ora ſe debba eſſere poſitivo, o negativo) ora conſiderata queſta proporzione, come quella della moltiplicazione, ma inverſamente poſta, ſi ſa che eſſendo poſitivo il ſecondo termine b, non potrà eſſere poſitivo il primo ab ſe non ſia poſitivo il terzo a; ed eſſendo negativo il ſecondo b, non potrà eſſere negativo il primo ab ſe non ſia poſitivo il terzo a; e però nella diviſione quando ſieno poſitivi, o negativi i due primi, cioè il dividendo, ed il diviſore, biſognerà che ſia poſitivo il terzo, cioè il quoziente. Iſteſſamente pure non può nella ſteſſa ſerie, o proporzione eſſere poſitivo il ſecondo b, e negativo il primo ab, o pure negativo il ſecondo b, e poſitivo il primo ab ſe non ſia negativo il terzo a; adunque nella diviſione eſſendo poſitivo il dividendo, e negativo il diviſore, o pure all' oppoſto, dovrà neceſſariamente eſſere negativo il quoziente.

13. Per questa ragione sarà dunque lo stesso scrivere per esempio, $\frac{a}{-b}$, come $\frac{-a}{b}$, imperciocchè se a positivo devesi dividere per b negativo, dunque il quoziente deve essere negativo; come pure è lo stesso scrivere $\frac{-a}{-b}$, ed $\frac{a}{b}$.

Della Estrazione delle Radici dalle Quantità semplici intere.

14. Come evvi nelle potestà il quadrato, il cubo, la quarta potestà, la quinta ec.; così tra le radici vi è la quadrata o sia seconda, la cubica o sia terza, la quarta, la quinta ec. La denominazione della radice si chiama il di lei indice, e però l' indice della radice quadrata, o sia seconda è il due; della cubica, o sia terza il tre; della quarta il quattro ec.; e per cavare la radice da una data quantità devesi ritrovare quell' altra quantità, la quale moltiplicata in se stessa tante volte una meno, quante sono le unità nell' indice della radice, abbia prodotta la quantità proposta; così a sarà la radice quadrata di aa, la cubica di a^3, la quarta di a^4 ec.; istessamente la radice quadrata di $aabb$ sarà ab; di $16aabbcc$ sarà la radice quadrata $4abc$; la cubica di $27a^3x^3$ sarà $3ax$, e così dell' altre.

15. E poichè il prodotto del meno col meno è sempre positivo, come di sopra si è veduto, quindi è, che la radice quadrata di aa sarà tanto a, quanto $-a$, cioè $\pm a$; non così della cubica, la quale sarà positiva se sia positivo il cubo, e sarà negativa se sia quello negativo, poichè il cubo di a sarà a^3, e $-a^3$ quello di $-a$; bensì la radice

quarta

quarta ſarà e poſitiva, e negativa; e generalmente parlando, la radice d'indice pari ſarà ſempre e poſitiva, e negativa; d'indice diſpari ſarà poſitiva ſe poſitiva la quantità propoſta, e negativa ſe ſia quella negativa. E perchè, per la ſteſſa natura de' ſegni nella moltiplicazione, neſſuna quantità poſitiva, o negativa può mai generare poteſtà negativa d'eſponente pari; così è impoſſibile ritrovare radice d'indice pari di quantità negativa. Queſte tali radici d'indice pari di quantità negativa ſi chiamano impoſſibili, o immaginarie; ſarà dunque immaginaria la radice quadrata di $-aa$, la quarta di $-a^4$, la quadrata, e ſeſta di $-a^6$ ec.; e ſarà vera, e reale la radice terza di $-a^3$, la quinta di $-a^5$ ec.

16. Ma il più delle volte la propoſta quantità, di cui ſi vuole la radice, non ſarà un quadrato, un cubo, o altra poteſtà nata dalla moltiplicazione di quantità razionale in ſe ſteſſa, ma ſarà un prodotto d'altra natura, come ab, abc ec.; in queſti caſi ſi fa uſo di queſto ſegno $\surd$, che chiamaſi vincolo radicale, onde $\sqrt[2]{ab}$, o ſemplicemente $\sqrt{ab}$ vorrà dire radice quadrata di ab, $\sqrt[3]{abc}$ vorrà dire radice cuba di abc, e così $\sqrt[4]{\ }$ radice quarta, $\sqrt[5]{\ }$ radice quinta ec., e queſte tali quantità affette dal vincolo radicale ſi chiamano Irrazionali.

Della Somma delle Quantità composte intere.

17. Dalla somma, o sottrazione delle quantità semplici nascono le composte. Per sommare queste pure basta scriverle una dopo l'altra con que' segni, che hanno. Per sommare adunque $a + b$ con $c - d$, si scriva $a + b + c - d$; per sommare $2aa - xx$ con $3cc + 2yy$, si faccia $2aa - xx + 3cc + 2yy$; per sommare $aa - xx$ con $bb + xx + yy$, si faccia $aa - xx + bb + xx + yy$; ma quì osservisi, che $- xx$ e $+ xx$ si elidono, e distruggono, adunque cancellati questi, la somma sarà $aa + bb + yy$; per sommare $2aa - 5bb$ con $aa + 2bb + yy$, si scriva $2aa - 5bb + aa + 2bb + yy$; ma $2aa + aa$ fanno $3aa$, e $- 5bb + 2bb$ fanno $- 3bb$, adunque la somma sarà $3aa - 3bb + yy$.

Della Sottrazione delle Quantità composte intere.

18. Si mutino i segni alla quantità, che si vuol sottrarre, indi con i segni così mutati si scriva presso quella, da cui si vuol fare la sottrazione. Per sottrarre $c - d$ da $a + b$ si scriva $a + b - c + d$, e la ragione è chiara, imperciocchè sottraendo la sola quantità c, e scrivendo $a + b - c$ già si avrebbe sottratto troppo, perchè devesi sottrarre $c - d$, cioè la sola differenza di c e di d, e però si avrebbe sottratto più del dovere, quanto è la quantità d, adunque per avere giusta la sottrazione bisognerà aggiungere essa quantità d, e scrivere $a + b - c + d$; lo stesso dicasi delle

quan-

quantità più composte. Per sottrarre $a + 3b$ da $3a + 2b$, si scriva $3a + 2b - a - 3b$, e facendo la riduzione dei termini simili, poichè $3a - a$ è $2a$, e $2b - 3b$ è $-b$, sarà il residuo $2a - b$; per sottrarre $aa - 2ab$ da $2aa - ab$, si scriva $2aa - ab - aa + 2ab$, cioè $aa + ab$; per sottrarre $3ab - 2bc + 2cd$ da $5ab - 4bc + 2cd$, si scriva $5ab - 4bc + 2cd - 3ab + 2bc - 2cd$, cioè facendo la riduzione, $2ab - 2bc$.

Della Moltiplicazione delle Quantità composte intere.

19. Intesa la regola del moltiplicare le quantità incomplesse, è facilissima quella delle composte. Si scriva adunque l'uno de' moltiplicatori sotto l'altro, all'uso dell' aritmetica volgare, indi per ciascun termine dell'uno de' moltiplicatori si moltiplichino tutti i termini dell'altro con la data regola delle quantità semplici, in quello, che risulta, si faccia al solito la riduzione de' termini simili, ed avrassi il prodotto. Abbiasi da moltiplicare $a + b - c$ per x; si scriva $\begin{array}{r} a + b - c \\ x \\ \hline ax + bx - cx \end{array}$, si moltiplichi per x ciascun termine dell'altro moltiplicatore posto al disopra, e sarà il prodotto $ax + bx - cx$. Abbiasi da moltiplicare $2a + 3b - c$ per $3x - 2y$, si scriva $\begin{array}{l} 2a + 3b - c \\ 3x - 2y \\ \hline 6ax + 9bx - 3cx - 4ay - 6by + 2cy \end{array}$, per lo termine $3x$ si moltiplichino tutti i termini della quantità posta al di sopra, indi si faccia lo stesso per lo termine $-2y$, e se altri termini vi fossero al di sotto si farebbe lo stesso;

ſteſſo; e ſarà il prodotto $6ax + 9bx - 3cx - 4ay - 6by + 2cy$. Nè importa, che l'operazione ſi cominci a deſtra, o a ſiniſtra riſpetto all'uno, ed all'altro de' moltiplicatori, ſiccome nulla importa, che di eſſi piuttoſto l'uno, che l'altro ſi ſcriva ſopra o ſotto, e che ſi ponga il tale o tal'altro termine per primo. Abbiaſi da moltiplicare $aa + xx$ per $aa - xx$, adunque ſi ſcriva

$$\begin{array}{r} aa + xx \\ aa - xx \\ \hline \end{array}$$

ed il prodotto ſarà $a^4 + aaxx - aaxx - x^4$

ma $aaxx - aaxx$ ſi elidono; adunque il prodotto ſarà $a^4 - x^4$.

Nelle moltiplicazioni lunghe, per maggior facilità di ridurre i termini ſimili, torna aſſai comodo lo ſcrivere eſſi termini ſimili, che nella moltiplicazione ſi generano, uno ſotto l'altro in queſta guiſa

ſi moltiplichi $4a^3 + 3aab - 2abb + b^3$

per $aa - 5ab + 6bb$

$$\begin{array}{rrrrrr} 4a^5 & + 3a^4b & - 2a^3bb & + aab^3 & - 5ab^4 & + 6b^5 \\ & - 20a^4b & - 15a^3bb & + 10aab^3 & - 12ab^4 & \\ & & + 24a^3bb & + 18aab^3 & & \end{array}$$

dove preſto ſi vede, che $3a^4b - 20a^4b$ fanno $-17a^4b$; che $-2a^3bb - 15a^3bb + 24a^3bb$ fanno $7a^3bb$; che $aab^3 + 10aab^3 + 18aab^3$ fanno $29aab^3$; che $-5ab^4 - 12ab^4$ fanno $-17ab^4$; e però il prodotto ſarà finalmente $4a^5 - 17a^4b + 7a^3bb + 29aab^3 - 17ab^4 + 6b^5$.

20. Alle volte è ſuperfluo il fare l'attual moltiplicazione nella guiſa, che ſi è detta, baſtando ſemplicemente l'indicarla, il che ſuole farſi per mezzo di queſto ſegno $\times$, e col

è col tirare una retta sopra ciascuno de' moltiplicatori, la quale si estenda sopra tutti que' termini, che entrano nella moltiplicazione; così $\overline{aa+xx}\times\overline{aa-xx}$ vorrà dire il prodotto di $aa+xx$ in $aa-xx$; ma nella quantità $\overline{aa+xx}\times\overline{aa-xx}$ $\pm a^4$ non essendo il termine $\pm a^4$ sotto la retta linea, non s'intende egli compreso nella moltiplicazione di modo, che così scrivendo vorrà dire il prodotto di $aa+xx$ in $aa-xx$, al quale prodotto è in oltre aggiunto, o sottratto a^4.

21. In quella guisa, che nelle quantità semplici il prodotto di a in a dicesi il quadrato di a, il prodotto di aa in a dicesi il cubo di a, il prodotto di a^3 in a la quarta potestà ec.; così nelle quantità composte il prodotto, per esempio, di $a+b$ in $a+b$, o sia $\overline{a+b}\times\overline{a+b}$ dicesi il quadrato di $a+b$, il quale non volendosi formare attualmente colla moltiplicazione, si scriverà così $\overline{a+b}^2$; istessamente $\overline{a+b}^2\times\overline{a+b}$ sarà il cubo, e si scriverà $\overline{a+b}^3$; $\overline{a+b}^3\times\overline{a+b}$, o pure $\overline{a+b}^2\times\overline{a+b}^2$ dicesi la quarta potestà, e si scrive $\overline{a+b}^4$; lo stesso intendasi delle quantità di più termini.

Per formare attualmente queste potestà, devesi moltiplicare in se la quantità, ed il prodotto nella stessa quantità successivamente tante volte una meno, quante unità contiene il numero dell'esponente di essa potestà, che si desidera. Ma per la seconda potestà, cioè per lo quadra-

to, ſi può abbreviare l'operazione così: Se la quantità è un binomio, cioè di due termini, come $a \pm b$; ſi faccia il quadrato del primo termine, indi ſe gli ſcrivano appreſſo i due rettangoli, cioè due volte il prodotto del primo termine nel ſecondo con quel ſegno, che porta la regola della moltiplicazione, e finalmente ſi aggiunga il quadrato del ſecondo termine. Così $\overline{a+b}^2$ ſarà $aa + 2ab + bb$; $\overline{a-b}^2$ ſarà $aa - 2ab + bb$; $\overline{-a-b}^2$ ſarà $aa + 2ab + bb$. Se la quantità foſſe un trinomio, cioè di tre termini, ſi ſcrivano in oltre i due rettangoli del primo termine nel terzo, e due altri rettangoli del ſecondo nel terzo (intendendo, che queſti rettangoli abbiano que' ſegni, che porta la moltiplicazione) e finalmente il quadrato del terzo termine. Così $\overline{a+b-c}^2$ ſarà egli $aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc$. Se la quantità ſarà un quadrimonio, cioè di quattro termini, ſi ſcrivano in oltre due volte i rettangoli de' primi tre termini nel quarto, con di più il quadrato di eſſo quarto termine ec.

22. Ma riſpetto alle quantità binomie può ſervire il ſeguente Canone generale non ſolo per elevarle al quadrato, ma a qualunque poteſtà m, intendendo per m un qualunque numero. Sia dunque $p + q$ da elevarſi alla poteſtà m, ſarà eſſa

$$p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{\overline{m-1}}{2} p^{m-2}qq + m \times \frac{\overline{m-1}}{2} \times \frac{\overline{m-2}}{3} p^{m-3}q^3$$

$$+ m \times \frac{\overline{m-1}}{2} \times \frac{\overline{m-2}}{3} \times \frac{\overline{m-3}}{4} p^{m-4}q^4$$ ec., e così proſeguendo con la ſteſſa legge.

Deb-

Debbasi adunque fare il quadrato di $p+q$, in questo caso m sarà 2, e però sostituito nel canone in luogo della m il 2, sarà il primo termine pp; il secondo $2p^{2-1}q$, cioè $2pq$; il terzo $2 \times \frac{\overline{2-1}}{2} p^{2-2}qq$, cioè qq (non essendovi considerata la quantità p, perchè elevata alla potestà nulla si eguaglia all'unità, come si dimostrerà al numero 50.) il quarto $2 \times \frac{\overline{2-1}}{2} \times \frac{\overline{2-2}}{3} \times p^{2-3}q^3$, ma $2-2$ è lo stesso che zero, adunque questo termine è moltiplicato per zero, e così pure ciascun de' susseguenti, onde saranno essi ancora zero, e però il canone terminerà col terzo termine, e sarà il quadrato ricercato $pp+2pq+qq$.

Si voglia la terza potestà di $p+q$; sarà $m=3$, quindi sarà zero il quinto termine coi susseguenti, e la ricercata potestà (fatta la sostituzione di 3 in luogo di m) $p^3+3ppq+3pqq+q^3$. Se la quantità da elevarsi sarà $p-q$, basterà porre il segno meno a tutti que' termini, ne' quali la q è a potestà dispari.

Il suddetto canone serve non solo per lo binomio $p \pm q$, ma per qualunque altro ancora; e però si voglia la terza potestà di $2ax-xx$: si supponga $2ax=p$, e $-xx=q$, sarà $m=3$, indi nel canone in luogo di p, e delle potestà di p si sostituisca $2ax$, e le corrispondenti sue potestà, lo stesso si faccia di $-xx$ in luogo di q, e delle sue potestà, e si ponga 3 in luogo di m, e sarà $8a^3x^3-12aax^4+6ax^5-x^6$.

Anzi potrà egli servire per qualunque polinomio, cioè per qualunque quantità composta di più termini, che di due. Sia il trinomio $a+b-c$ da elevarsi alla terza potestà, sarà dunque $m=3$; si ponga $a=p$, e $b-c=q$, indi surrogato a, e le sue potestà in luogo di p, e delle sue potestà, siccome in luogo di q, e sue potestà sostituito $b-c$, e sue corrispondenti potestà, sarà $a^3+3aa\times\overline{b-c}+3a\times\overline{b-c}^2+\overline{b-c}^3$, cioè $a^3+3aab-3aac+3abb-6abc+3acc+b^3-3bbc+3bcc-c^3$.

Della Divisione delle Quantità composte intere.

23. Tre combinazioni, o siano tre diversi casi possono darsi intorno alla divisione delle quantità complesse; il primo quando sia complessa la quantità da dividersi, e semplice il divisore; il secondo quando sia semplice quella, e composto questo; il terzo quando siano composti e l'una, e l'altro. Quanto ai primi due casi basta far uso della regola delle quantità semplici. Nel primo caso si divida ciascun termine della quantità proposta per lo divisore, e nasceranno intieri, o rotti, o in parte intieri, ed in parte rotti, come porterà la natura della divisione nelle quantità semplici. Così dividendo $aa+ab-ac$ per a, avrassi $a+b-c$; dividendo $4ab-6bc+xx$ per $2b$, avrassi $2a-3c+\frac{xx}{2b}$; dividendo $4ab-cc+3xx$ per $3c$, avrassi $\frac{4ab-cc+3xx}{3c}$, o sia $\frac{4ab}{3c}-\frac{c}{3}+\frac{xx}{c}$. Nel secondo caso si scriva il divisore

sotto

ſotto al dividendo, all'uſo delle frazioni, e ſe in ciaſcun termine del numeratore, e del denominatore vi ſarà qualche quantità comune, ſi cancelli queſta; e ciò, che rimane, ſarà ſempre una frazione. Dividendo però $3a^3b$ per $aa - ax + ab$, ſarà il quoziente $\frac{3a^2b}{a - x + b}$. Dividendo $6a^4$ per $2aa - 2ax + 2xx$, ſarà il quoziente $\frac{3a^4}{aa - ax + xx}$.

24. Nel terzo caſo fa d'uopo in primo luogo ordinare il dividendo, ed il diviſore relativamente ad una qualche lettera, che ſi crederà più a propoſito, il che ſi fa ſcrivendo per primo termine e nel dividendo, e nel diviſore quello, in cui queſta lettera ſi trova alla maggior dimenſione o poteſtà, per ſecondo termine quello, in cui queſta ſteſſa lettera è alla poteſtà più proſſima; e così ſucceſſivamente ſino a que' termini, che affatto non contengano eſſa lettera, i quali ſaranno gli ultimi. Così ſarebbe ordinata relativamente alla lettera a la quantità $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$, ed il diviſore $a - b$. Che ſe ſi voleſſe ordinare relativamente alla lettera b, ſi ſcriverebbe la quantità così: $bbc - 3abc - aab + a^3 + 2aac$, ed il diviſore così: $-b + a$.

Ciò poſto, la diviſione ſi fa in queſta maniera: Si divide il primo termine del dividendo per lo primo termine del diviſore, ed il quoziente ſi ſcrive a parte; per queſto quoziente ſi moltiplica tutto il diviſore, ed il prodotto ſi ſottrae dal dividendo; fatta la ſottrazione, e ridotti i

ter-

termini, di nuovo si divide nella stessa maniera per lo primo termine del divisore il primo termine di ciò, che è rimasto nel dividendo, cioè del primo resto, e questo quoziente si scrive presso l'altro con quel segno, che deve avere; indi per questo secondo quoziente si moltiplica tutto il divisore, ed il prodotto si sottrae dal dividendo, cioè dal primo resto, ed in questa guisa operando si ripete il calcolo fino a tanto, che dalla sottrazione nulla rimanga, e la somma di tutti i quozienti parziali sarà il quoziente totale nato dalla divisione.

Sia da dividersi $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ per $a - b$. Si scriva la quantità da dividersi in (A), il divisore in (B); diviso a^3 per a, il quoziente sarà aa, che si scriva in (D), indi fatto il prodotto del quoziente nel divisore, e sottratto dal dividendo, rimarrà il primo resto (M). Si divida il primo termine $2aac$ di questo residuo (M) per lo stesso primo termine a del divisore, e scrivasi il quoziente $2ac$ presso l'altro in (D), si sottragga dal primo resto (M) il prodotto di $2ac$ nel divisore (B), ed averassi il secondo resto (N). Si divida il primo termine $-abc$ di questo secondo resto per lo stesso termine a del divisore, ed il quoziente $-bc$ si scriva in (D) vicino agl'altri, dal secondo resto (N) sottraggasi il prodotto di $-bc$ nel divisore, e nulla rimane; adunque il quoziente sarà $aa + 2ac - bc$

(A) $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ (B) $a - b$

(M) $2aac - 3abc + bbc$

(D) $aa + 2ac - bc$

(N) $-abc + bbc$

Sia

Sia da dividersi $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ per $a - b$. Si scriva il dividendo in (A), il divisore in (B), dividasi il primo termine a^3 per a, ed il quoziente aa si scriva in (D), indi fatto il prodotto del quoziente nel divisore, e sottratto dal dividendo, rimarrà il primo resto (M); si divida il primo termine di questo resto (M), cioè $-2aab$ per lo stesso primo termine a del divisore, e scrivasi il quoziente $-2ab$ presso l'altro in (D), sottraggasi dal primo resto (M) il prodotto di $-2ab$ nel divisore, e si avrà il secondo resto (N), si divida il primo termine abb di questo secondo resto per lo stesso primo termine a del divisore, ed il quoziente bb si scriva in (D) accanto degl'altri, sottraggasi indi dal secondo resto (N) il prodotto di bb nel divisore (B), e nulla rimane; adunque il quoziente totale sarà $aa - 2ab + bb$

(A)	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	(B) $a - b$
(M)	$-2aab + 3abb - b^3$	(D) $aa - 2ab + bb$
(N)	$abb - b^3$	

Altro Esempio

Dividendo	$2aa + 5ab + 2bb - ac - 2bc$,	Divisore $a + 2b$
Primo resto	$ab + 2bb - ac - 2bc$,	Quoziente $2a + b - c$
Secondo resto	$-ac - 2bc$	

Altro Esempio

Divid.	$9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4$,	Divisore $3dd - ee$
Primo resto	$12d^3e + 3ddee - 4de^3 - e^4$,	Quoz. $3dd + 4de + ee$
Secondo resto	$3ddee - e^4$	

Altro

Altro Esempio

Dividendo $4aa + 4ab - 2ac + bb - cc$ Divisore $2a + b$
Primo resto $2ab - 2ac + bb - cc$
Secondo resto $-2ac - cc$ Quoziente $2a + b - c$
Terzo resto $bc - cc$

Ma quì osservisi, che l'ultimo resto $bc - cc$ non è divisibile per $2a$, ed in conseguenza non può andare avanti l'operazione, rimanendo la frazione $\frac{bc - cc}{2a + b}$, e questo vuol dire, che la proposta quantità non è interamente divisibile per $2a + b$, ma solo in parte, e però sarà il quoziente in parte intero, ed in parte rotto, cioè $2a + b - c + \frac{bc - cc}{2a + b}$, o pure tutto rotto, scrivendo $\frac{4aa + 4ab - 2ac + bb - cc}{2a + b}$.

Dell'Estrazione delle Radici dalle Quantità composte intere.

25. Come nelle quantità semplici, così nelle composte la radice quadrata di una qualunque quantità è quella, che moltiplicata in se stessa â prodotta la quantità data; la cubica quella, che moltiplicata in se due volte, la quarta tre ec.

La maniera di cavare la radice quadrata nelle quantità complesse è la seguente, intendendo però, che prima sieno ordinati i termini relativamente ad una lettera secondo, che è stato detto al numero 24.

Sia la quantità $aa + 2ab + bb$, di cui si vuole la radice quadrata, che si scriva in (A); si cavi la radice quadrata dal

dal primo termine aa, e sarà essa a, la quale si scriva in (B), si sottragga dalla quantità proposta (A) il quadrato di essa, cioè aa, ed il residuo si scriva in (D), indi si raddoppj la quantità a scritta in (B), e si scriva in (M), e sarà essa $2a$; per $2a$ si divida il primo termine di (D), ed il quoziente b si scriva in (B), indi si moltiplichi il divisore $2a$ nel quoziente b, e si sottragga il prodotto dalla quantità (D), e di più da essa si sottragga il quadrato di b, e perchè nulla rimane, sarà $a+b$ la radice cercata

(A) $aa+2ab+bb$ (B) $a+b$
(D) $2ab+bb$ (M) $2a$

Sia la quantità $a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$. Si scriva in ($A$), e si estragga la radice quadrata dal primo termine, che è aa, e si scriva in (B), il quadrato di aa sottraggasi dalla quantità (A), e rimane la quantità (D), si raddoppj aa, e si scriva in (M), e per esso raddoppiato, cioè per $2aa$, dividasi il primo termine del primo resto (D), ed il quoziente $3ab$ si scriva in (B), indi sottratto il prodotto di $3ab$ nel divisore $2aa$ con di più il quadrato di esso $3ab$ dal primo resto (D), rimarrà il secondo resto (H). Si raddoppj tutta la quantità (B), e si scriva in (G), per lo primo termine di essa si divida il primo termine di (H), ed il quoziente $-2bb$ si scriva in (B), e perchè sottratto il prodotto del quoziente nel divisore (G) con di più il quadrato dello stesso quoziente dalla quantità (H), nulla rimane, sarà la quantità scritta in (B),

cioè $aa + 3ab - 2bb$ la radice, che si cerca.

(A)	$a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$	(B)	$aa + 3ab - 2bb$
(D)	$6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$	(M)	$2aa$
(H)	$-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$	(G)	$2aa + 6ab$

Ecco l'Operazione per altri Esempj.

Sia	$y^4 + 4ay^3 - 8a^3y + 4a^4$	Rad. $yy + 2ay - 2aa$
Primo resto	$4ay^3 - 8a^3y + 4a^4$	$2yy$
Secondo resto	$-4aayy - 8a^3y + 4a^4$	$2yy + 4ay$

Sarà adunque la radice quadrata $yy + 2ay - 2aa$

Sia la quantità

	$16a^4 - 24aaxx - 16aabb + 12bbxx + 9x^4$	Rad. $4aa - 3xx - 2bb$
I. resto	$-24aaxx - 16aabb + 12bbxx + 9x^4$	$8aa$
II. resto	$-16aabb + 12bbxx$	$8aa - 6xx$
III. resto	$-4b^4$	

Con questa operazione si arriva in fine all'ultimo resto $-4b^4$, il quale non è divisibile in alcun modo per $8aa$, come esigge il metodo, che in questo caso non â luogo. Ciò vuol dire, che dalla quantità proposta non si può attualmente estraere la radice quadrata, e però conviene servirsi del segno radicale, come di sopra al numero 16.; lo stesso facciasi in simili casi per altre radici cube, quarte ec., e così $\sqrt{aa + bb}$ vorrà dire la radice quadrata di $aa + bb$; $\sqrt[3]{aab - abb}$ vorrà dire la radice cuba di $aab - abb$ ec.

26. Rispetto alle radici cube. Sia da estraersi la radice cuba dalla quantità $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, che si scri-

ſcriva in (A). Si cavi la radice cuba dal primo termine a^3 della quantità propoſta, e ſi ſcriva in (B), ſi ſottragga il cubo di queſta, cioè a^3, dalla quantità (A), ed il reſiduo ſi ſcriva in (D), ſi faccia indi il triplo del quadrato di a, cioè $3aa$, e ſi ſcriva in (M), per eſſo ſi divida il primo termine del reſiduo (D), ed il quoziente b ſi ſcriva in (B), per eſſo ſi moltiplichi il diviſore $3aa$, ed il prodotto con di più il triplo del quadrato di b nella quantità a, ed il cubo di b ſi ſottragga dal reſiduo (D); e perchè nulla rimane, ſarà $a + b$ la radice, che ſi cercava.

(A) $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (B) $a + b$
(D) $3aab + 3abb + b^3$ (M) $3aa$

Debbaſi eſtraere la radice cuba dalla quantità

$$z^6 + 6bz^5 - 40b^3z^3 + 96b^5z - 64b^6.$$

Si cavi la radice dal primo termine z^6, che ſarà zz, e ſi ſcriva in (B), ſottraggaſi il cubo di (B) dalla propoſta quantità (A), ed il reſiduo ſi ſcriva in (D), ſi faccia il triplo del quadrato di (B), e ſi ſcriva in (M), indi per eſſo ſi divida il primo termine della quantità (D), ed il quoziente $2bz$ ſi ſcriva in (B), ſottraggaſi poſcia il prodotto di $2bz$ nella quantità (M), e di più il triplo del quadrato di $2bz$ moltiplicato in zz con il cubo di $2bz$ dal reſiduo (D), e ſcrivaſi il reſiduo in (H), facciaſi il triplo del quadrato di (B), che ſcrivaſi in (G), e per lo primo termine di eſſo ſi divida il primo termine della quantità (H), ed il quoziente $-4bb$ ſi ſcriva in (B), ſi moltipli-

chi questo quoziente nella quantità (G), ed il prodotto con di più il triplo del quadrato di $-4bb$ in $zz + 2bz$, ed il cubo di $-4bb$ sottraggasi dalla quantità (H), e nulla rimane ; onde sarà la radice cuba della quantità proposta tutta la quantità (B), cioè $zz + 2bz - 4bb$.

Radice cuba

(A) $z^6 + 6bz^5 - 40b^3z^3 + 96b^5z - 64b^6$ (B) $zz + 2bz - 4bb$

(D) I. resto $6bz^5 - 40b^3z^3 + 96b^5z - 64b^6$ (M) $3z^4$

(H) II. resto $-12bbz^4 - 48b^3z^3 + 96b^5z - 64b^6$ (G) $3z^4 + 12bz^3 + 12bbzz$

Nello stesso modo si farà intorno alla quantità

Radice cuba

(A) $27y^6 - 54cy^5 + 144ccy^4 - 152c^3y^3 + 192c^4yy - 96c^5y + 64c^6$ (B) $3yy - 2cy + 4cc$

(D) I. resto $-54cy^5 + 144ccy^4 - 152c^3y^3 + 192c^4yy - 96c^5y + 64c^6$ (M) $27y^4$

(H) II. resto $108ccy^4 - 14$[illegible]$c^3y^3 + 192c^4yy - 96c^5y + 64c^6$ (G) $27y^4 - 36cy^3 + 12ccyy$

27. Per le radici quarte. Sia proposta la quantità $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$, di cui si voglia la radice quarta. Si scriva in (A), e si cavi la radice quarta dal primo termine, che sarà a, e si scriva in (B), sottraggasi la quarta potestà di (B) dalla quantità (A), ed il residuo si scriva in (D), indi facciasi il quadruplo del cubo di a, e si scriva in (M), per esso si divida il primo termine della quantità (D), ed il quoziente b si scriva in (B), dalla quantità (D) si sottragga il prodotto del quoziente b nel divisore $4a^3$, e di più il sestuplo del quadrato di b nel quadrato di a, ed il prodotto del quadruplo del cubo di b nella quantità a, e finalmente il quadrato-quadrato o la

quarta

quarta potestà di b; e perchè nulla rimane, sarà $a+b$ la radice cercata

$$(A)\ a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \quad (B)\ a+b$$
$$(D)\quad 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \quad (M)\ 4a^3$$

28. Rispetto alla radice quinta. Per vedere in quale maniera crescano le operazioni da farsi, basta formare la quinta potestà del binomio, per esempio $a+b$, la quale ci darà regola, siccome la seconda, terza, e quarta potestà dello stesso binomio ci â data regola per le radici quadrata, cuba, e quarta. Similmente si discorra delle radici sesta, settima ec.

Del Calcolo delle Frazioni semplici, e composte.

29. Dalla divisione delle quantità s'è veduto come nascono le frazioni, o siano i rotti. Una frazione adunque indica una divisione da farsi del numeratore per lo denominatore, onde ne viene, che se il numeratore sarà lo stesso del denominatore, come $\frac{a}{a}$, o pure $\frac{aa-bb}{aa-bb}$, ed altre simili, tali frazioni niente altro vorranno significare, che l'unità, perchè di fatto dividendo a per a, $aa-bb$ per $aa-bb$, il quoziente è l'unità. E perchè la moltiplicazione è un'operazione contraria alla divisione, è chiaro, che un qualunque intero si può ridurre ad essere una frazione di qualsivoglia denominatore, se per la quantità, che deve essere il denominatore, si moltiplicherà, e si dividerà l'intero; così

così per ridurre l'intiero a ad una frazione del denominatore b si scriverà $\frac{ab}{b}$; per ridurre $a-b$ ad una frazione del denominatore d si scriverà $\frac{ad-bd}{d}$; per ridurre $a+b$ ad una frazione del denominatore $c-d$ si scriverà $\frac{\overline{a+b}\times\overline{c-d}}{c-d}$, cioè $\frac{ac+bc-ad-bd}{c-d}$.

Della Riduzione delle Frazioni all'espressione più semplice.

30. Quando le frazioni ânno in ciascun termine del numeratore, e del denominatore la stessa, o le stesse lettere basta cancellare nell'uno, e nell'altro le lettere comuni, avendo riguardo alle potestà loro, come dissi nella divisione al numero 10.; così $\frac{a^3bb}{ac}$ sarà $\frac{aabb}{c}$; $\frac{ab^3}{abc}$ sarà $\frac{bb}{c}$; $\frac{a^3b-x^3b}{ab-bb}$ sarà $\frac{a^3-x^3}{a-b}$. Ma quando anche nel numeratore, e denominatore non vi siano le stesse lettere, purchè l'uno, e l'altro sieno moltiplicati per la stessa quantità, saranno anco per essa divisibili, ed in conseguenza si potrà ridurre la frazione. Adunque $\frac{aac-aad}{cd-dd}$, che è appunto $\frac{aa\times\overline{c-d}}{d\times\overline{c-d}}$, ridotta sarà $\frac{aa}{d}$; $\frac{\overline{aa+2ab}^2}{aab+2abb}$, o sia $\frac{\overline{aa+2ab}\times\overline{aa+2ab}}{\overline{aa+2ab}\times b}$, sarà ridotta $\frac{aa+2ab}{b}$; $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$, o sia $\frac{\overline{aa-bb}\times\overline{c-d}}{d\times\overline{c-d}}$, ridotta sarà $\frac{aa-bb}{d}$;

aac

$\frac{aac - aad - acd + add}{cd - da}$, o sia $\frac{\overline{aa - ad} \times \overline{c - d}}{d \times \overline{c - d}}$, ridotta sarà $\frac{aa - ad}{d}$ ec.

Generalmente adunque ogni qual volta la frazione è tale, che il numeratore, e denominatore sieno ambi divisibili per una stessa quantità (che in questi casi si chiama il loro comun divisore) facendo attualmente le divisioni, i due quozienti daranno la frazione ridotta; ma avvertasi, che se il comune divisore non è il massimo, la frazione sarà bensì ridotta, ma non alla più semplice espressione; così la frazione $\frac{a^3 - abb}{aac + abc}$, che è $\frac{a \times \overline{a + b} \times \overline{a - b}}{a \times c \times \overline{a + b}}$ può essere divisa nel numeratore, e nel denominatore per a, per $a + b$, e per $aa + ab$; il massimo di questi divisori è $aa + ab$; adunque perchè sia ridotta alla minima, bisognerà dividerla per $aa + ab$, e sarà il quoziente $\frac{a - b}{c}$. Ma il più delle volte è assai difficile il riconoscere se vi sia, e quale sia questo comun divisore, e però se ne darà la regola più abbasso al numero 36, per ora ommettendolo a fine di non confondere troppo la Gioventù non ancora avvezza, e passerò all'altre operazioni servendomi di frazioni ridotte all'espressione più semplice.

Del Ridurre le Frazioni al comun Denominatore.

31. Se le frazioni sono due: Si moltiplichi il numeratore della prima nel denominatore della seconda, indi il numeratore della seconda nel denominatore della prima, e ciascun prodotto si divida per lo prodotto de' due denominatori; così $\frac{a}{b} + \frac{x}{y}$ sarà $\frac{ay + xb}{by}$; $\frac{a^3}{yy} - \frac{2xx}{3b}$ sarà $\frac{3a^3b - 2xxyy}{3byy}$; $\frac{aa - xx}{m + n} - \frac{aa}{m}$ sarà $\frac{aam - mxx - aam - aan}{mm + mn}$, cioè $\frac{-mxx - aan}{mm + mn}$. Ma devesi avvertire, che alle volte i due denominatori delle frazioni possono avere un massimo comun divisore, nel qual caso è superflua la moltiplicazione de' numeratori in esso massimo comun divisore, e di essi comuni divisori fra loro per formare un nuovo denominatore, perchè dovrebbesi poi, ciò non ostante, ridurre la frazione alla più semplice espressione; quindi debbonsi moltiplicare i suddetti numeratori non per i denominatori, ma per i quozienti, che risultano dal dividere essi denominatori per lo comune loro divisore; ed il denominatore sarà il prodotto di essi quozienti, e del detto comun divisore. Per esempio sia $\frac{a^3}{mn} + \frac{abb}{mx}$, riducendo al solito al comun denominatore, sarebbe $\frac{a^3mx + abbmn}{mmnx}$, cioè $\frac{a^3x + abbn}{mnx}$; adunque era superfluo moltiplicare i nume-

mera-

meratori per m comun divisore de' denominatori, siccome era superfluo moltiplicare i denominatori fra loro, e bastava moltiplicare a^3 in x, ed abb in n per formare i numeratori, e moltiplicare m in n in x per formare il comune denominatore. Così per ridurre al comune denominatore $\frac{a^3-b^3}{\overline{a+b}^2} - \frac{aa}{a+b}$ basterà moltiplicare $-aa$ in $a+b$, e sarà $\frac{a^3-b^3-a^3-aab}{\overline{a+b}^2}$, cioè $\frac{-b^3-a^2b}{\overline{a+b}^2}$. Similmente per ridurre al comun denominatore $\frac{b^4}{aac-aad} + \frac{a^3+b^3}{cd-dd}$, poichè $c-d$ è comun divisore di ambi i denominatori, basterà moltiplicare b^4 per d, ed a^3+b^3 per aa rispetto a' numeratori, e moltiplicare aa in d in $c-d$ rispetto al denominatore, e però sarà $\frac{b^4d+a^5+aab^3}{aacd-aadd}$.

Se le frazioni da ridursi al comun denominatore fossero tre: Si riducano le prime due, indi si riduca la risultante da queste colla terza; e così successivamente se fossero più. Per ridurre al comun denominatore $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}$, si riducano le prime due, e si avrà $\frac{ad+bc}{bd}$; e ridotta questa con la terza sarà $\frac{adn+bcn-bdm}{bdn}$. Che se inoltre vi fossero degli intieri; poichè qualunque intiero si può considerare, come una frazione, che abbia l'unità per denominatore, si procederà nello stesso mo-

do; così $2aa + \frac{3x^4 - 2y^4}{3xx - 6ax}$, cioè $\frac{2aa}{1} + \frac{3x^4 - 2y^4}{3xx - 8ax}$ sarà $\frac{6aaxx - 16a^3x + 3x^4 - 2y^4}{3xx - 8ax}$.

Della Somma, e Sottrazione delle Frazioni.

32. Le frazioni si sommano con lo scriverle una presso dell'altra con que' segni, che ânno; ed all'opposto nella sottrazione si mutano i segni a quelle, che debbonsi sottrarre; e lo stesso facciasi se con le frazioni vi fossero degl'intieri. Per sommare $\frac{aa}{c}$ con $\frac{bb}{c}$, si scriva $\frac{aa + bb}{c}$; per sommare $\frac{aa}{c}$ con $\frac{xx - y}{m}$, si scriva $\frac{aa}{c} + \frac{xx - y}{m}$, che ridotta poi, se si vuole, al comun denominatore è $\frac{aam + cxx - cmy}{cm}$; per sommare $\frac{aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4}$ con $\frac{aabb}{aa - bb}$, si scriva $\frac{aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4} + \frac{aabb}{aa - bb}$, che se in oltre si voglia ridurre al comun denominatore, si osservi, che il denominatore della prima è il quadrato di $aa - bb$; adunque i denominatori ânno il massimo comun divisore $aa - bb$; e per esso divisi, i quozienti sono $aa - bb$ del primo, e l'unità del secondo, e però basterà moltiplicare il numeratore della seconda frazione per $aa - bb$, e dividere il tutto per $a^4 - 2aabb + b^4$, e sarà $\frac{aab^4 + a^4bb - aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4}$,

cioè

cioè $\frac{a^4bb}{a^4 - 2aabb + b^4}$. Per sottrarre $\frac{bb}{c}$ da $\frac{aa}{c}$ si scriva $\frac{aa - bb}{c}$.

Per sottrarre $a - \frac{xx}{m}$ da $\frac{yy}{m-n}$ si scriva $\frac{yy}{m-n} - a + \frac{xx}{m}$, e riducendo, se si vuole, al comun denominatore $\frac{myy - amm + amn + mxx - nxx}{mm - mn}$. Per sottrarre $\frac{b^4}{4aac - 4aad}$ da $\frac{a^3 + b^3}{2cd - 2dd}$ si scriva $\frac{a^3 + b^3}{2cd - 2dd} - \frac{b^4}{4aac - 4aad}$, e volendo ridurre al comune denominatore si moltiplicherà $a^3 + b^3$ per $2aa$, e $-b^4$ per d, ed il tutto si dividerà per $4aacd - 4aadd$, e sarà $\frac{2a^5 + 2aab^3 - b^4d}{4aacd - 4aadd}$.

Della Moltiplicazione delle Frazioni.

33. Si moltiplicano i numeratori fra loro, e lo stesso si fa de' denominatori, e la nuova frazione è il prodotto delle frazioni moltiplicate. Così per moltiplicare $\frac{ac}{b}$ in $\frac{bc}{d}$ si scriva $\frac{abc^2}{bd}$, che si riduce ad $\frac{acc}{d}$; per moltiplicare $\frac{2ab}{b+c}$ in $\frac{3aa - bb}{5c}$ si scriva $\frac{6a^3b - 2ab^3}{5bc + 5cc}$. Lo stesso si faccia se vi sieno interi considerando l'intiero, come una frazione, il di cui denominatore sia l'unità; così per moltiplicare $2a$ in $\frac{xx - 3yy}{3x}$ si faccia $\frac{2axx - 6ayy}{3x}$.

Debbasi moltiplicare $\frac{aa + bb}{a - b}$ in $a - b$. In questi, e simili casi, giacchè la quantità, che deve moltiplicare, è la stessa del denominatore della frazione, basterà cancellare il denominatore, ed il prodotto sarà $aa + bb$; debbasi moltiplicare $aa - bb$ in $\frac{aa - ab}{a + b}$: si osservi, che $aa - bb$ è $\overline{a + b} \times \overline{a - b}$, e però si verrebbe a moltiplicare $aa - ab$ in $a + b$ in $a - b$ per indi dividere per $a + b$; adunque giacchè $a + b$ sarebbe un comun divisore del numeratore, e denominatore, che risulterebbe, si potrà ommettere e la moltiplicazione, e la divisione per esso $a + b$, bastando che si moltiplichi il numeratore per $a - b$, ed il prodotto sarà $a^3 - 2aab + abb$. Così il prodotto di $\frac{a^3 - abb}{xx - yy}$ in $\frac{a^3}{aa - bb}$ sarà $\frac{a^4}{xx - yy}$.

Della Divisione delle Frazioni.

34. La divisione delle frazioni si farà moltiplicando in croce, cioè moltiplicando il numeratore del dividendo nel denominatore del divisore, e questo prodotto sarà il numeratore della frazione, che deve essere il quoziente; indi moltiplicando il denominatore del dividendo nel numeratore del divisore, ed il prodotto sarà il denominatore del quoziente. Questo quoziente poi, se farà bisogno, si ridurrà all'espressione più semplice. Debbasi dividere $\frac{ab}{c}$

per

per $\frac{m}{n}$, sarà il quoziente $\frac{abn}{cm}$; debbasi dividere $\frac{ab}{c}$ per $\frac{-m}{n}$, sarà $\frac{abn}{-cm}$, o sia $-\frac{abn}{cm}$, che è lo stesso, numero 13.; debbasi dividere $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$, sarà $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.

E' chiaro il vedere, che se le due frazioni, cioè dividendo, e divisore, avessero il medesimo denominatore, sarebbe superflua la moltiplicazione in croce, come se si volesse dividere $\frac{aa}{m}$ per $\frac{c-d}{m}$, bastando in questo caso dividere aa per $c-d$; poichè moltiplicando in croce sarebbe $\frac{aam}{cm-dm}$, ma riducendo alla minima espressione sarà $\frac{aa}{c-d}$. Così dividendo $\frac{a^3-abb}{c-d}$ per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, sarà $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$; ma riducendola, poichè il numeratore è $a\times\overline{a+b}\times\overline{a-b}$, ed il denominatore è $\overline{a+b}\times\overline{a+b}$, sarà $\frac{aa-ab}{a+b}$. Istessamente si operi dividendo intiero per frazione, o frazione per intiero, considerando l'intiero come una frazione, il di cui denominatore sia l'unità; così dividendo per $\frac{2yy-3xy}{3a}$ la quantità $aa-xx$, sarà $\frac{3a^3-3axx}{2yy-3xy}$.

Dell'Estrazione delle Radici dalle Frazioni.

35. Si estrae la radice dalle frazioni con lo estraere la radice dal numeratore, ed indi dal denominatore; e questa

questa nuova frazione sarà la radice della frazione proposta. La radice quadrata di $\frac{aabb}{cc}$ sarà adunque $\frac{ab}{c}$; la radice quadrata di $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$ sarà $\frac{aa - bb}{a + 2b}$; la radice quadrata di $4aa + \frac{64xx - 160ax}{25}$, cioè di $\frac{100aa + 64xx - 160ax}{25}$ sarà $\frac{10a - 8x}{5}$. Lo stesso dicasi delle radici cube, quarte, quinte ec.

Ma se non si potrà estraere la radice dal numeratore, e denominatore, bensì da uno de' due; si estragga da quello, da cui si può, ed all' altro si ponga il segno radicale. Così la radice cuba di $\frac{a^6}{a^3 - x^3}$ sarà $\frac{aa}{\sqrt[3]{a^3 - x^3}}$, la radice cuba di $\frac{aax - x^3}{a^3 b^3}$ sarà $\frac{\sqrt[3]{aax - x^3}}{ab}$. E se nè dal numeratore, nè dal denominatore si potrà estrarre essa radice, si porrà tutta la frazione sotto al vincolo radicale; così la radice quadrata di $\frac{x^4 - a^4}{xx + bx}$ sarà $\sqrt{\frac{x^4 - a^4}{xx + bx}}$.

Del massimo comun Divisore di due Quantità, o Formole.

36. Per formola s'intende una qualunque espressione analitica incomplessa, o complessa, le di cui lettere facendo figura d'indeterminate possono essere quelle, che più si vuole per modo, che tutto ciò, che di essa formola si dica, s'intenda

da detto di qualunque altra d'altre lettere composta, ma ad essa simile.

Per avere il massimo comun divisore di due quantità, o formole: In primo luogo si osservi, se ciascun termine d'ambedue fosse moltiplicato per una medesima quantità, o numero; nel qual caso per esso si faccia la divisione, indi si ordini l'una, e l'altra formola secondo una qualunque lettera a piacere; cioè si ponga per primo termine quello, in cui essa lettera è alla maggiore dimensione, ed indi gli altri per ordine. Sieno le due formole $\frac{18a^3bx - 8a^4b - 3abx^3 - 8a^2bxx + bx^4}{6a^3b + bx^3 - abxx - 8aabx}$ le quali, poichè sono divisibili per la lettera b, divise ed ordinate, se così piace, per la lettera x sono $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$; $x^3 - axx - 8aax + 6a^3$. Ciò fatto, la prima, cioè quella in cui la lettera x, che ordina i termini, è alla maggior dimensione, si divida per la seconda dicendo x^4 diviso per x^3 dà di quoziente x, ed il prodotto di questo quoziente nel divisore si sottragga dal dividendo, e si avrà il primo resto $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, che si riduca all'espressione più semplice (come sempre deve farsi) dividendolo per $-2a$, e sarà $x^3 - 6aax + 4a^3$. E perchè la dimensione della x in questo residuo è la stessa del divisore, con lo stesso divisore si divida esso residuo, da cui istessamente sottraggasi il prodotto del quoziente nel divisore, e si avrà il secondo residuo $axx + 2aax - 2a^3$, cioè, dividendo per a, $xx + 2ax - 2aa$. Ora poichè in questo resi-

duo

duo la dimensione della x è minore che nel divisore, s'inverta l'ordine, e si faccia servire questo residuo di divisore, ed il divisore primo di dividendo, e fatta la divisione, si sottragga il prodotto del quoziente nel secondo divisore dal secondo dividendo, cioè da $x^3 - axx - 8aax + 6a^3$, e sarà il residuo $- 3axx - 6aax + 6a^3$, cioè dividendo per $- 3a$, $xx + 2ax - 2aa$; e perchè quest'ultimo residuo è lo stesso del divisore, sarà esso il massimo comun divisore delle due formole $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$; $x^3 - axx - 8aax + 6a^3$, e questo moltiplicato in b, cioè $bxx + 2abx - 2aab$ sarà il massimo comune divisore delle due formole da prima proposte $bx^4 - 3abx^3 - 8aabxx + 18a^3bx - 8a^4b$; $bx^3 - abxx - 8aabx + 6a^3b$, le quali furono divise per b.

Sieno le due formole $x^4 - 4ax^3 + 11aaxx - 20a^3x + 12a^4$; $x^4 - 3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4$ ordinate per la lettera x, la quale essendo alla stessa dimensione nell'una, e nell'altra, è arbitrario di prendere quella, che si vuole, per divisore. Si divida adunque la prima per la seconda, e sottratto dal dividendo il prodotto del quoziente nel divisore, sarà il primo residuo $- ax^3 - aaxx - 4a^3x - 12a^4$, cioè dividendo per $- a$, $x^3 + axx + 4aax + 12a^3$. Quì invertendo l'ordine si prenda questo residuo per divisore, ed il primo divisore per dividendo; fatta la divisione, e sottrazione del prodotto del quoziente in questo secondo divisore dal secondo dividendo, sarà il secondo residuo $- 4ax^3 + 8aaxx - 28a^3x + 24a^4$; cioè divi-

dividendo per $-4a$, $x^3 - 2axx + 7aax - 6a^3$. Con lo steſſo ſecondo diviſore ſi continovi la diviſione di queſto ſecondo reſiduo, e fatta la ſottrazione al ſolito, ſi avrà il terzo reſiduo $-3axx + 3aax - 18a^3$, cioè dividendo per $-3a$, $xx - a\,x + 6aa$. Si inverta di nuovo l'ordine, e per queſto terzo reſiduo ſi divida il ſecondo diviſore $x^3 + axx + 4aax + 12a^3$, e fatta la ſottrazione al ſolito, ſi troverà il reſiduo $2axx - 2aax + 12a^3$, cioè dividendo per $2a$, $xx - ax + 6aa$, che è la ſteſſa quantità di quella, che â ſervito di diviſore; e però il maſſimo comune diviſore delle due propoſte formole.

Sieno le due formole $f^4 - aaff - bbff + aabb$; $f^3 - aff - 2abf + 2aab$ ordinate per la lettera f. Si divida la prima per la ſeconda, ed il prodotto del quoziente f nel diviſore ſottratto dal dividendo darà il reſiduo primo $af^3 - aaff + 2abff - bbff - 2aabf + aabb$, che ſi proſeguiſca a dividere per lo ſteſſo diviſore, e ſottratto il prodotto del diviſore nel quoziente a dal dividendo, ſi avrà il ſecondo reſiduo $2abff - bbff - 2a^3b + aabb$, cioè dividendo per b, $2aff - bff - 2a^3 + aab$; ſi inverta l'ordine, e per queſto ſecondo reſiduo ſi divida il primo diviſore $f^3 - aff - 2abf + 2aab$, e fatto il prodotto del quoziente $\frac{f}{2a-b}$ nel detto reſiduo, che â ſervito ora di diviſore, ed indi fatta la ſottrazione, ſi avrà il terzo reſiduo $-aff + aaf - 2abf + 2aab$, cioè dividendo per $-a$, $ff - af + 2bf - 2ab$. Con lo ſteſſo ordine ſi continovi la diviſione, e ſottratto il prodotto del

quoziente $\frac{1}{2a-b}$ nel divisore $2aff-bff+aab-2a^3$, si â il quarto residuo $-af+2bf-2ab+aa$, per cui, invertendo pure l'ordine, si divida il terzo residuo, e sottratto il prodotto del quoziente $\frac{f}{2b-a}$ nel divisore, si avrà il quinto residuo $2bf-2ab$, cioè dividendolo per $2b$, $f-a$; esso si divida per il quarto residuo $-af+2bf-2ab+aa$, e sottratto il prodotto del quoziente $\frac{1}{2b-a}$ nel divisore, rimane nulla; quindi se per lo denominatore dell'ultimo quoziente, essendo una frazione, si dividerà l'ultimo divisore $-af+2bf-2ab+aa$, sarà il quoziente $f-a$ il massimo divisore delle due formole proposte; ma perchè era arbitrario di eleggere per divisore quello, che si è eletto per dividendo, e vicendevolmente, cioè si poteva anche dividere $-af+2bf-2ab+aa$ per $f-a$, si faccia attualmente la divisione, ed il quoziente sarà $2b-a$ senza residuo, e però $f-a$ il massimo comune divisore, come si è già ritrovato per mezzo dell'altra divisione.

Possono però due formole avere un massimo comun divisore, quantunque essendo esse ordinate secondo una tal lettera, non possa in questo modo ritrovarsi, nel qual caso fa d'uopo ordinarle secondo altra lettera fino, che ci venga fatto di ritrovarlo; che se fatta la prova ordinandole secondo ciascuna lettera, non ci riesce l'intento, non averanno esse un massimo comune divisore; così non ritroverassi nelle due formole di quest'ultimo esempio ordinandole

nandole secondo la lettera b, che però si è ritrovato avendole ordinate secondo la lettera f.

Le tre frazioni adunque

$$\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$$

$$\frac{x^4 - 4ax^3 + 11aaxx - 20a^3x + 12a^4}{x^4 - 3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4}$$

$$\frac{f^4 - aaff - bbff + aabb}{f^3 - aff - 2abf + 2aab}$$

dividendo il numeratore, e denominatore della prima per $xx + 2ax - 2aa$; della seconda per $xx - ax + 6aa$; e della terza per $f - a$, verranno ad essere

La Prima $$\frac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$$

La Seconda $$\frac{xx - 3ax + 2aa}{xx - 2ax + 4aa}$$

La Terza $$\frac{f^3 + aff - bbf - abb}{ff - 2ab}$$

Ridotte così all'espressione più semplice, come dissi di sopra al numero 30.

Della Riduzione delle Quantità irrazionali alla più ſemplice eſpreſſione.

37. Si è veduto, come naſcano le quantità irrazionali, che ſorde ancora, o radicali ſi chiamano; cioè quando attualmente non ſi può eſtrarre la radice, che ſi cerca, e però ſi fa uſo del vincolo radicale. Ma ſpeſſe volte accade, che la quantità ſotto al vincolo ſia il prodotto di due moltiplicatori, uno de' quali ſia appunto una poteſtà dello ſteſſo nome della radice, che ſi vuole; come ſarebbe $\sqrt{aabc}$, o $\sqrt{aab - aax}$, la prima delle quali è la radice quadrata del prodotto di aa in bc, la ſeconda del prodotto di aa in $b - x$; così pure $\sqrt[3]{a^3x - a^3y}$, che è la radice cuba del prodotto di a^3 in $x - y$. In queſti caſi ſi cava la radice da quel moltiplicatore, da cui ſi può, e ſi ſcrive fuori del ſegno radicale laſciando l'altro ſotto il ſegno, e ciò diceſi cavare la radice in parte, o ſia ridurre la radicale alla più ſemplice eſpreſſione. Adunque $\sqrt{aabc}$ ſarà lo ſteſſo, che $a\sqrt{bc}$; $\sqrt{aab - aax}$ lo ſteſſo, che $a\sqrt{b - x}$; $\sqrt[3]{a^3x - a^3y}$ lo ſteſſo, che $a\sqrt[3]{x - y}$; e così dell' altre. Similmente poichè $\sqrt{48aabc}$ è la radice del prodotto di $16aa$ in $3bc$, ridotta ſarà $4a\sqrt{3bc}$; così poichè $\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$ è la radice del prodotto di $aa -$

$- 4ab$

$-4ab+4bb$ in ab, e la radice di $aa-4ab+4bb$ è $a-2b$; sarà la radice ridotta $\frac{\overline{a-2b}}{c}\sqrt{ab}$. Così $\sqrt{\frac{aammxx+4aam^3p}{ppzz}}$ ridotta sarà $\frac{am}{pz}\sqrt{xx+4mp}$. Così $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$ ridotta sarà $2a\sqrt[3]{b+2a}$. Così $\sqrt{a^3-3aab+3abb-b^3}$, che è la radice del prodotto di $aa-2ab+bb$ in $a-b$, ridotta sarà $\overline{a-b}\sqrt{a-b}$. Ma molte volte non si può colla sola ispezione riconoscere, quali sieno que' moltiplicatori, dai quali è nata la proposta radicale; in questi casi bisogna servirsi del metodo di ritrovare tutti i divisori, che darò a suo luogo, e se fra questi ve ne sarà uno, che sia appunto una potestà di tale esponente, quale è l'indice del radicale, si potrà ridurre nel modo, che è stato detto, la quantità proposta.

Del Ridurre i Radicali alla stessa Denominazione.

38. Si chiamano radicali di diversa denominazione quelli, che ânno l'indice diverso. Per ridurgli adunque a' radicali dello stesso indice si farà così: Se l'indice d'un radicale è parte aliquota dell'indice dell'altro, si divida l'indice maggiore per il minore, ed il quoziente è quella potestà, a cui si debbono elevare le quantità, che sono sotto il radicale d'indice minore, ed a queste prefiggere il radicale dell'indice maggiore. Sieno da ridursi allo stesso radicale le due quantità $\sqrt{\sqrt{ax}}$, o sia (che è lo stesso)

ſo) $\sqrt[4]{ax}$, e $\sqrt{a}$; poichè il quattro diviſo per due dà di quoziente due, elevata la quantità a del ſecondo radicale al quadrato, ſarà $\sqrt[4]{aa}$, e però ridotta alla ſteſſa denominazione di $\sqrt[4]{ax}$. Così $\sqrt[6]{a^3b^3+ab^5}$, e $\sqrt{ab}$ ſaranno $\sqrt[6]{a^3b^3+ab^5}$, e $\sqrt[6]{a^3b^3}$. Ma ſe un indice non è parte aliquota dell' altro; ſi trovi il minimo numero, che ſia diviſibile ſenza frazione da ciaſcun indice de' radicali dati, e queſto ſarà l'indice del radicale comune; indi ſi elevino le quantità al grado proſſimamente inferiore del numero, per cui ſono creſciuti gl'indici dei loro reſpettivi radicali, e ad eſſe così elevate ſi prefigga il radicale comune ritrovato. Siano da ridurſi allo ſteſſo comune radicale le due quantità $\sqrt{aq}$, e $\sqrt[3]{aaq}$; il minimo numero diviſibile per 2, e per 3 ſarà 6, adunque $\sqrt[6]{}$ ſarà il comune radicale, e perchè l'indice della radice quadrata è creſciuto in queſto caſo di quattro, e quello della cubica di tre; adunque ſi farà riſpetto alla prima $\sqrt[6]{a^3q^3}$, e per la ſeconda $\sqrt[6]{a^4qq}$. Se i radicali da ridurſi foſſero più di due; ſe ne riducano prima due, e poi il terzo, e così ſucceſſivamente.

E' chiaro il modo di ridurre ſenza ajuto di regola i razionali a qualunque radicale elevando il razionale alla poteſtà dello ſteſſo nome, o indice del radicale, e prefiggendogli lo ſteſſo radicale.

Della

Della Somma, e Sottrazione delle Quantità radicali.

39. Per ſommarle ſi ſcrivano le quantità radicali una dopo l'altra co' loro ſegni, e per ſottrarle ſi mutino i ſegni a quelle, che ſi vogliono ſottrarre, come ſi è fatto nell'altre quantità. Così per ſommare $5a\sqrt{bc}$ con $2b\sqrt{bx}$ con $-c\sqrt{zy}$, ſi ſcriva $2b\sqrt{bx}+5a\sqrt{bc}-c\sqrt{zy}$. Per ſommare $5x\sqrt{ab}$ con $3x\sqrt{ab}$ con $y\sqrt{bx}$, ſi ſcriva $5x\sqrt{ab}+3x\sqrt{ab}+y\sqrt{bx}$, e riducendo i termini ſimili, il che ſempre ſi deve fare, ſarà $8x\sqrt{ab}+y\sqrt{bx}$. Per ſommare $a-b$ con $\sqrt{aa-xx}$, ſi ſcriva $a-b+\sqrt{aa-xx}$. Lo ſteſſo, avuto riguardo ai ſegni, ſi faccia nelle ſottrazioni.

Della Moltiplicazione delle Quantità radicali.

40. Per moltiplicare quantità razionale con ſorda o radicale ſi ſcrive la razionale unitamente alla radicale, ſenza alcun ſegno frappoſto, prefiggendo a queſto prodotto quel ſegno poſitivo, o negativo, che porta la regola ordinaria della moltiplicazione, la qual coſa intendaſi ſempre doverſi fare. Il prodotto adunque di a in $\sqrt{aa-xx}$ ſarà $a\sqrt{aa-xx}$, ed il prodotto di ab in $-\sqrt{ab}$ ſarà $-ab\sqrt{ab}$. E ſe le quantità razionali, e radicali foſſero di più termini, cioè compleſſe, ſi moltiplichi ciaſcun termine dell'una in ciaſcun termine dell'altra, e però il

pro-

prodotto di $aa - xx$ in $\sqrt{xx - yy}$ sarà $aa\sqrt{xx - yy} -$ $- xx\sqrt{xx - yy}$, che si scrive anche così $\overline{aa - xx}\sqrt{xx - yy}$ intendendo, che sieno moltiplicati nel radicale que' termini, che sono coperti al di sopra dalla retta linea.

41. Per moltiplicare i radicali fra loro (supposto, che sieno della medesima denominazione, e non lo essendo tali si riducano) si moltiplicano fra loro le quantità, che sono sotto i segni radicali, ed al prodotto si pone lo stesso vincolo radicale con quel segno positivo, o negativo, che esigge la solita regola. Quindi moltiplicando $\sqrt{bc}$ in $\sqrt{xy}$, il prodotto sarà $\sqrt{bcxy}$; moltiplicando $\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ in $-\sqrt{aa + xx}$, il prodotto sarà $-\sqrt{\frac{a^4 - x^4}{x}}$.

42. Che se in oltre i radicali averanno coefficienti razionali numerici, o letterali, si moltiplichino i coefficienti fra loro, ed i radicali fra loro, ed il prodotto de' coefficienti si ponga senza segno frapposto avanti al radicale. Così $a\sqrt[3]{bbc}$ in $a\sqrt[3]{bxx}$ sarà $aa\sqrt[3]{b^3cxx}$, cioè ridotta, $aab\sqrt[3]{cxx}$; così $2a - \sqrt{aa - xx}$ in $\frac{b}{a}\sqrt{aa + xx}$ sarà $2b\sqrt{aa + xx} - \frac{b}{a}\sqrt{a^4 - x^4}$.

43. Con questa regola per moltiplicare $m\sqrt{ab}$ in $n\sqrt{ab}$ si dovrebbe fare $mn\sqrt{aabb}$; ma $aabb$ è un quadrato, e la radice è appunto ab, adunque per moltiplicare tra loro due radicali quadratici simili, basterà levare

vare il vincolo radicale, e la quantità, che era sotto, moltiplicata nel prodotto de' coefficienti sarà il prodotto totale, e però $\frac{2b}{a}\sqrt{ax-xx}$ in $-\frac{c}{3}\sqrt{ax-xx}$ sarà $-\frac{2bc}{3a}\times\overline{ax-xx}$, cioè $\frac{-2abcx+2bcxx}{3a}$. Ma devesi avere questa avvertenza, che se le radici, non avendo coefficienti, sono affette dallo stesso segno positivo, o negativo, levato il vincolo, si lasciano le quantità con que' segni, che ânno; e se le radici ânno segni contrarj, si mutano tutti i segni alla quantità; e però $\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ in $\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$, o pure $-\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ in $-\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ sarà $\frac{aa-xx}{x}$; e $\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ in $-\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ sarà $\frac{-aa+xx}{x}$, o $\frac{aa-xx}{-x}$. La ragione si è, perchè $\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ (e così di qualunque altra) s'intende avere sempre per coefficiente l'unità positiva, e $-\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ l'unità negativa, adunque il prodotto dovrà essere $1\times\overline{\frac{aa-xx}{x}}$ nel primo caso, e $-1\times\overline{\frac{aa-xx}{x}}$ nel secondo.

Ecco però alcuni esempj di queste moltiplicazioni

Moltiplicare $\sqrt{ab}+\sqrt{aa-xx}$

in $\sqrt{ab}+\sqrt{aa-xx}$

Prodotto $ab + \sqrt{a^3b - abxx} + aa - xx$

$+ \sqrt{a^3b - abxx}$

cioè $ab + 2\sqrt{a^3b - abxx} + aa - xx$

Moltiplicare $x - \sqrt{\frac{\sqrt{4a^4 + y^4} - yy}{2}}$

in $x + \sqrt{\frac{\sqrt{4a^4 + y^4} - yy}{2}}$

Prodotto $xx - x\sqrt{\frac{\sqrt{4a^4 + y^4} - yy}{2}} - \frac{\sqrt{4a^4 + y^4} + yy}{2}$

$+ x\sqrt{\frac{\sqrt{4a^4 + y^4} - yy}{2}}$

cioè $xx - \frac{\sqrt{4a^4 + y^4}}{2} + \frac{yy}{2}$

Moltiplicare $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}}}$

in $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}}}$

Prodotto $\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + q\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}} + \frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}}$

cioè $\sqrt[3]{\frac{qq}{2} + q\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}} - \frac{pp}{27}}$

44. Poichè $a\sqrt{ax}$, $\overline{a-b}\sqrt{ax-xx}$ ec. è il prodotto della quantità razionale nella radicale, e già ſi ſa ridurre qualunque razionale a quel radicale, che più piace, ne viene che ſi potrà ſempre, volendolo, far paſſare ſotto la radice quel razionale, che la moltiplica, ſenza alterare la quantità, e però ſarà $a\sqrt{a-x}$ lo ſteſſo, che $\sqrt{a^3-aax}$; $\overline{a-b}\sqrt{xy}$ ſarà lo ſteſſo, che $\sqrt{aaxy-2abxy+bbxy}$; $ax\sqrt[3]{m-n}$ ſarà lo ſteſſo, che $\sqrt[3]{a^3x^3m-a^3x^3n}$, e così di qualunque altra.

45. Se i radicali da moltiplicarſi non foſſero dello ſteſſo nome, tali ſi riducano, e poi ſi faccia la moltiplicazione, come ſi è detto; ma molte volte torna comodo l'indicarla ſolamente ſenza attualmente farla, e ciò con lo ſcrivere un radicale preſſo l'altro ſenza alcun ſegno frappoſto; quindi $\sqrt{aa-xx}\sqrt[3]{xxy}$ vorrà dire il prodotto di una nell'altra radice.

Della Diviſione delle Quantità radicali.

46. Se in ciaſcun termine del dividendo, e del diviſore vi foſſe la ſteſſa radicale, ommeſſa queſta, ſi dividano colla ſolita regola le quantità razionali, e ciò che riſulta ſarà il quoziente. Così a dividere $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, il quoziente ſarà $\frac{5}{3}$; a dividere $6\sqrt{a^4+aabb}$

per $2\sqrt{aabb + b^4}$, cioè $6a\sqrt{aa + bb}$ per $2b\sqrt{aa + bb}$, il quoziente sarà $\frac{3a}{b}$; a dividere $aa\sqrt[4]{aa + xx} - 2ax\sqrt[4]{aa + xx} + xx\sqrt[4]{aa + xx}$ per $a\sqrt[4]{aa + xx} - x\sqrt[4]{aa + xx}$, ommesso il radicale, e diviso $aa - 2ax + xx$ per $a - x$, sarà il quoziente $a - x$; a dividere $aa + bb$ per $\sqrt{aa + bb}$, poichè il dividendo è $\sqrt{aa + bb}\sqrt{aa + bb}$, sarà il quoziente $\sqrt{aa + bb}$.

47. Ma quando le radicali non sono le stesse, essendo per altro lo stesso l'indice della radice, si dividono al solito delle quantità razionali le quantità sotto il vìncolo, ed al quoziente si prefigge il comune vincolo radicale; così a dividere $\sqrt[3]{a^3b - ab^3}$ per $\sqrt[3]{aa - bb}$, diviso $a^3b - ab^3$ per $aa - bb$, ne viene ab; e però il quoziente sarà $\sqrt[3]{ab}$.

48. E se gl'indici delle radici saranno diversi, si riducano allo stesso, e si operi poi come ho detto, onde a dividere $\sqrt{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$ per $a + b$ si faccia il quadrato di $a + b$, e si ponga sotto al vincolo, sarà $\sqrt{aa + 2ab + bb}$; indi per la quantità di questa radice si divida la prima, e risulta $aa - bb$; adunque il quoziente sarà $\sqrt{aa - bb}$.

Con la combinazione di queste regole, e di quelle dell'ordinaria divisione si possono dividere le quantità più

più compleſſe. Sia da dividerſi $a^3b - abbc - aab\sqrt{bc} + bbc\sqrt{bc}$ per $a - \sqrt{bc}$, ſi faccia al ſolito delle diviſioni

Dividendo $a^3b - abbc - aab\sqrt{bc} + bbc\sqrt{bc}$ Diviſore $a - \sqrt{bc}$
Primo reſto $- abbc + bbc\sqrt{bc}$ Quoziente $aab - bbc$

Così pure dividendo $a^3 - abc + aa\sqrt{bc} - bc\sqrt{bc}$ per $a - \sqrt{bc}$ averaſſi per quoziente $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$. E ſe la diviſione non potrà ſuccedere, ſi ſcriverà in forma di frazione.

Dell' Eſtrazione della Radice quadrata dalle Quantità radicali.

49. Purchè la quantità in qualunque modo compoſta di razionali con radicali ſia di radicali quadratici, la regola di eſtrarne la radice quadrata ſarà queſta: Preſa della quantità propoſta una qualunque parte, che ſia maggiore della rimanente, dal quadrato della parte maggiore ſi ſottragga il quadrato della parte minore, e la radice quadrata di ciò, che reſta, ſi aggiunga alla parte maggiore, indi da eſſa ſi ſottragga; le radici quadrate della metà di queſta ſomma, e della metà di queſta differenza preſe aſſieme, poſto quel ſegno alla ſeconda che â la parte minore, ſaranno la radice quadrata della propoſta quantità. Debbaſi cavare la radice quadrata dalla quantità $3 + \sqrt{8}$, ſottratto il

qua-

quadrato di $\sqrt{8}$ dal quadrato di 3, rimane 1, la di cui radice è pure 1; aggiungendola adunque alla parte maggiore, cioè a 3, farà 4, e dalla stessa sottraendola farà 2, adunque la radice quadrata della metà del 4 con la radice quadrata della metà del 2 faranno la radice cercata, cioè $\sqrt{2} + 1$.

Vogliasi la radice quadrata di $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$. Dal quadrato di $6 + \sqrt{8}$ sottratto il quadrato di $-\sqrt{12} - \sqrt{24}$, rimane 8, la di cui radice $\sqrt{8}$ aggiunta a $6 + \sqrt{8}$, parte maggiore, fa $6 + 2\sqrt{8}$, e da essa parte maggiore sottratta fa 6; e però la prima parte della radice cercata sarà $\sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{8}}{2}}$, cioè $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$, e la seconda $-\sqrt{\frac{6}{2}}$, cioè $-\sqrt{3}$ (perchè la minor parte della quantità proposta era affetta dal segno negativo) onde $\sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3}$ sarà la radice. Ma nell' antecedente esempio si è veduto essere $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ lo stesso, che $1 + \sqrt{2}$; adunque la radice della proposta quantità sarà finalmente $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Debbasi estrarre la radice quadrata da $aa + 2x\sqrt{aa - xx}$. Sottratto dal quadrato di aa il quadrato di $2x\sqrt{aa - xx}$, sarà $a^4 - 4aaxx + 4x^4$, la di cui radice è $aa - 2xx$, la quale aggiunta alla parte maggiore aa, e presane la metà, farà $aa - xx$, e da essa sottratta, e presa la metà della differenza, farà xx; adunque la ricercata radice sarà $\sqrt{aa - xx} + x$. Deb-

Debbasi estrarre la radice quadrata dalla quantità $aa + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4xx}$. Dal quadrato di $aa + 5ax$, parte maggiore, sottratto il quadrato di $-2a\sqrt{ax + 4xx}$, rimane $a^4 + 6a^3x + 9aaxx$, la di cui radice è $aa + 3ax$, la quale aggiunta alla parte maggiore, e presane la metà, fa $aa + 4ax$, e sottratta e presane la metà, fa ax; e però la radice cercata sarà $\sqrt{aa + 3ax} - \sqrt{ax}$.

Debbasi estrarre la radice quadrata dalla quantità $a\sqrt{bc} + d\sqrt{bc} + 2\sqrt{abcd}$. Dal quadrato di $a\sqrt{bc} + d\sqrt{bc}$ sottratto il quadrato di $2\sqrt{abcd}$, rimane $aabc - 2abcd + bcdd$, la di cui radice è $a\sqrt{bc} - d\sqrt{bc}$, la quale aggiunta alla parte maggiore, ed indi sottratta, e presa la metà della somma e della differenza, sarà la metà di detta somma $a\sqrt{bc}$, e la metà di detta differenza $d\sqrt{bc}$; adunque la radice cercata sarà $\sqrt{a\sqrt{bc}} + \sqrt{d\sqrt{bc}}$, cioè $\sqrt{\sqrt{aabc}} + \sqrt{\sqrt{bcdd}}$, o sia $\sqrt[4]{aabc} + \sqrt[4]{bcdd}$. Che se non succederà di poter estrarre la radice, si porrà al solito il vincolo radicale.

Del Calcolo delle Potestà.

50. Nulla occorre notare intorno alla somma, e sottrazione delle Potestà, scrivendosi esse pure una dopo l'altra con que' segni che ânno, nel primo caso, e mutandosi i segni nel secondo. Ma rispetto all'altre ope-

operazioni, che riguardano gli esponenti: Si osservi primieramente, che presa l'unità per primo termine, ed una qualunque quantità, per esempio a, per secondo, indi successivamente le altre potestà per ordine della stessa quantità a, è chiaro che formerassi una progressione geometrica crescente $1, a, aa, a^3, a^4, a^5, a^6$ ec., e che gli esponenti di essa progressione formeranno una progressione aritmetica crescente, che sarà $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ec., il di cui primo termine è il zero, perchè essendo l'unità il primo termine della geometrica, in esso la quantità a è elevata a potestà zero, cioè a nessuna potestà di modo, che $1 = \frac{a}{a} = a^0$. In fatti moltiplicando tanto $\frac{a}{a}$, quanto a^0 per a, onde non si turbi l'eguaglianza, sarà $a = a^{0+1}$, grandezze patentemente identiche. E se in oltre si continuerà la stessa progressione geometrica al di sotto dell'unità, sarà essa $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$ ec.; e continuando parimenti la progressione aritmetica degli esponenti, essi doveranno essere $0, -1, -2, -3, -4$ ec.; e però negativi gli esponenti di tali potestà, adunque $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}$ ec. sarà lo stesso, che a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} ec., e generalmente $\frac{1}{a^n}$ sarà lo stesso, che a^{-n}; vale a dire, che si potrà sempre far passare nel numeratore di una frazione la potestà, che

è nel denominatore, mutando il segno all'esponente, e vicendevolmente.

51. Se di più si volessero introdurre nella progressione geometrica de' nuovi termini intermedj, gli esponenti di questi saranno nuovi termini intermedj simili nella progressione aritmetica; quindi poichè $\sqrt{a}$ è media geometrica fra l'unità ed a, l'esponente di essa dovrà essere medio aritmetico fra il zero e l'unità; e però sarà $\frac{1}{2}$, adunque sarà lo stesso $\sqrt{a}$ ed $a^{\frac{1}{2}}$. Se intendansi due medie proporzionali geometriche, che sono $\sqrt[3]{a}$ la prima, e $\sqrt[3]{aa}$ la seconda, dovranno essere medj aritmetici i loro esponenti fra il zero e l'unità, e però saranno $\frac{1}{3}$, e $\frac{2}{3}$; adunque sarà lo stesso $\sqrt[3]{a}$ ed $a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{aa}$ ed $a^{\frac{2}{3}}$. Se introdurransi tre medie proporzionali geometriche, che sono $\sqrt[4]{a}$ la prima, $\sqrt[4]{aa}$ la seconda, $\sqrt[4]{a^3}$ la terza, dovranno essere i loro esponenti $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$. Adunque sarà lo stesso $\sqrt[4]{a}$ ed $a^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{aa}$ ed $a^{\frac{2}{4}}$, $\sqrt[4]{a^3}$ ed $a^{\frac{3}{4}}$; e così discorrendo di quante altre medie si vogliano introdurre, onde sarà lo stesso generalmente $\sqrt[m]{a^n}$ ed $a^{\frac{n}{m}}$.

Lo stesso discorso facendo rispetto alla progressione prodotta al di sotto dell'unità; siccome $\sqrt{a}^{\overline{1}}$ è media tra l'unità ed $\frac{1}{a}$, o sia tra l'unità ed a^{-1}, così l'esponente

di essa dovrà essere medio tra il zero e l'unità negativa, sarà egli adunque $-\frac{1}{2}$, e però sarà lo stesso $\frac{1}{\sqrt{a}}$, ed $a^{-\frac{1}{2}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; così pure sarà lo stesso $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ ed $a^{-\frac{1}{3}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$; sarà lo stesso $\frac{1}{\sqrt[3]{aa}}$ ed $a^{-\frac{2}{3}}$, ovvero $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$ ec., e generalmente sarà lo stesso $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$ ed $a^{-\frac{n}{m}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$.

Ciò, che ho detto delle potestà intiere, o rotte di quantità incomplesse, s'intenda egualmente di quantità complesse, di modo che, per esempio $\frac{1}{\overline{aa+bb}^{\,n}}$ sarà lo stesso, che $\overline{aa+bb}^{\,-n}$; e così $\sqrt[m]{\overline{aa+bb}^{\,n}}$ sarà lo stesso, che $\overline{aa+bb}^{\,\frac{n}{m}}$; e $\frac{1}{\sqrt[m]{\overline{aa+bb}^{\,n}}}$ sarà lo stesso, che $\frac{1}{\overline{aa+bb}^{\,\frac{n}{m}}}$, o pure $\overline{aa+bb}^{\,-\frac{n}{m}}$.

52. Dalla natura delle due soprapposte progressioni, geometrica, ed aritmetica, si ricava la maniera di moltiplicare tra loro, e dividere due potestà, quali si sieno, della medesima quantità, cioè sommando gli esponenti loro quando vogliono moltiplicarsi le potestà, e sottraendo l'esponente del divisore dall'esponente del dividendo quando vogliono dividersi. Imperciocchè per ciò, che spetta alla moltiplicazione; comecchè il prodotto

dotto è il quarto proporzionale dell'unità, e de' due moltiplicatori, saranno questi quattro termini in una progressione geometrica, e gli esponenti loro in una progressione aritmetica; adunque l'esponente del quarto, cioè del prodotto, deve essere maggiore dell'esponente del terzo di quanto l'esponente del secondo è maggiore dell'esponente del primo; ma l'esponente del secondo è maggiore dell'esponente del primo, che è il zero, di tutto se stesso; adunque l'esponente del quarto dovrà essere maggiore dell'esponente del terzo, quanto è l'esponente del secondo, cioè dovrà essere la somma dell'esponente del secondo, e del terzo. Per ciò, che riguarda la divisione; ella è la stessa proporzione della moltiplicazione, ma inversa, il di cui primo termine è il dividendo; il secondo il divisore; il terzo il quoziente; ed il quarto l'unità, onde quanto l'esponente del dividendo è maggiore dell'esponente del divisore, tanto dovrà essere maggiore del zero l'esponente del quoziente, e però dovrà essere appunto la differenza degl'esponenti del dividendo, e divisore. Adunque per moltiplicare aa con a si farà a^{2+1}, cioè a^3; per moltiplicare a^5 con aa si farà a^{5+2}, cioè a^7; per moltiplicare a^6 con a^{-3} si farà a^{6-3}, cioè a^3; per moltiplicare $a^{\frac{1}{2}}$ con $a^{\frac{1}{3}}$ si farà $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, cioè $a^{\frac{5}{6}}$; per moltiplicare $a^{-\frac{2}{3}}$ con $a^{\frac{1}{5}}$ si farà $a^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}$, cioè $a^{-\frac{7}{15}}$; per moltiplicare $a^{\pm\frac{n}{m}}$ con $a^{\pm\frac{r}{t}}$ si farà $a^{\pm\frac{n}{m}\pm\frac{r}{t}}$, cioè $a^{\frac{\pm nt \pm mr}{mt}}$.

E così per dividere a^3 per a si farà a^{3-1}, cioè a^2; per dividere a^5 per a^{-2} si farà a^{5+2}, cioè a^7; per dividere a^2 per $a^{\frac{1}{2}}$ si farà $a^{2-\frac{1}{2}}$, cioè $a^{\frac{3}{2}}$; per dividere $a^{\frac{2}{3}}$ per $a^{-\frac{1}{2}}$ si farà $a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$, cioè $a^{\frac{7}{6}}$; per dividere $a^{\pm\frac{n}{m}}$ per $a^{\pm\frac{r}{t}}$ si farà $a^{\pm\frac{n}{m}\mp\frac{r}{t}}$, cioè $a^{\frac{\pm nt \mp mr}{mt}}$.

53. E poichè nella progressione di sopra considerata, preso un qualunque termine, il termine dell' esponente doppio è il quadrato del termine preso; il termine dell'esponente triplo è il cubo; dell'esponente quadruplo la quarta potestà ec.; ed il termine dell' esponente, che sia la metà, è la radice quadrata del termine preso, il termine dell'esponente, che sia la terza parte, la quarta ec., è la radice cuba, quarta ec. del termine preso; ne viene per conseguenza, che per ridurre una potestà ad un'altra, basterà moltiplicare l'esponente della potestà data per l'esponente di quella potestà, a cui si vuole elevare; e per cavarne una qualunque radice, basterà dividere l'esponente della potestà per l'indice della radice.

Così per elevare aa al cubo si farà $a^{2\times 3}$, cioè a^6; per elevare $a^{\frac{2}{3}}$ al cubo si farà $a^{\frac{2}{3}\times 3}$, cioè aa; per elevare $a^{-\frac{1}{4}}$ alla quinta potestà si farà $a^{-\frac{5}{4}}$; per elevare $a^{\pm\frac{n}{m}}$ alla potestà $\pm\frac{r}{t}$ si farà $a^{\pm\frac{nr}{mt}}$. Così per cavare

re la radice quadrata da a^5 si farà $a^{\frac{5}{2}}$; per cavare la radice cuba di $a^{\frac{1}{2}}$ si farà $a^{\overline{\frac{1}{2}\times 3}}$, cioè $a^{\frac{1}{6}}$; per cavare la radice r da $a^{\pm\frac{m}{n}}$ si farà $a^{\pm\frac{m}{nr}}$ ec.

54. Ciò, che ho detto delle potestà di una medesima quantità incomplessa, s'intenda egualmente detto delle potestà di una medesima quantità complessa, come da se è chiaro; e con questo metodo si viene a facilitare molto il calcolo delle frazioni; e de' radicali.

De' Divisori lineari d'una qualunque Formola.

55. Una qualunque quantità o formola incomplessa, o complessa si dice prima e semplice quando ella non è divisibile esattamente da quantità alcuna, fuorchè da se stessa, e dall'unità; e chiamasi composta quando è divisibile esattamente per alcun'altra quantità. Prime o semplici sarebbero, per esempio, $a+b$, $aa+xx$, $x^3-aax+aab$ ec.; composte ab, che è divisibile per a, e per b; $aa-xx$, che è divisibile per $a+x$, e per $a-x$ ec.

Due, o più formole sono prime rispettivamente tra loro quando non ânno alcuno comune divisore, e che la minore non è un divisore della maggiore; tali sarebbero tra loro bb ed aa; $aa+2ab+bb$ ed $aa+bb$ ec.; ed all'opposto sono assolutamente, e relativamente tra loro composte quando ânno qualche comun divisore,

visore, o che una divide l'altra, come a dire *aa*, ed *ab*, che sono ambe divisibili per *a*; *aa* — *xx*, ed *a* + *x*, che sono divisibili per *a* + *x* ec.

Per avere tutti i divisori incompleſſi di una quantità numerica, o letterale, o miſta; si divida essa per lo minimo di lei divisore, ed il quoziente di nuovo per lo minimo di lui divisore, e così successivamente fino a tanto, che si trovi un quoziente, che più non possa dividersi, che per se stesso; queste quantità, per le quali è stata divisa la proposta formola, compresa l'unità, saranno tutti i divisori semplici; e presi a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec., cioè secondo tutte le combinazioni, daranno tutti i divisori composti.

Si vogliano i divisori del numero 300

Si scriva il numero dato 300 in (*A*), ed accanto in (*B*) il minimo divisore, che è il 2; fatta la divisione per 2, si scriva in (*A*) il quoziente 150 sotto il 300, e questo 150 di nuovo si divida per 2, e gli si scriva di contro in (*B*) il divisore 2, ed il quoziente 75 si scriva in (*A*) sotto al primo quoziente 150. Poiche il 75 non è divisibile per 2, si divida per 3, e di contro gli si scriva in (*B*) il divisore 3, e sotto in (*A*) il quoziente 25; il minimo divisore del 25 è il 5, che gli si scriva dirimpetto in (*B*), e sotto in (*A*) il quoziente 5; il quoziente ultimo 5 non è divisibile, che per se stesso, adunque si scriva pure accanto in (*B*)

(*B*) esso divisore 5, e si avranno tutti i divisori primi, ai quali si aggiunga l'unità, perchè essa è sempre un divisore di qualunque quantità. Per avere tutti i divisori composti secondo tutte le combinazioni, per il secondo divisore si moltiplichi il primo, ed il prodotto 4 si scriva in (*B*) accanto al secondo divisore; per il terzo divisore si moltiplichino tutti i superiori, e gli si scrivano a canto i prodotti 6, 12 (ponendo una sol volta quelli, che potessero essere replicati), per il quarto si moltiplichino parimenti tutti i superiori, e gli si scrivano accanto i prodotti, e così successivamente fino all'ultimo. I numeri scritti in (*B*) saranno tutti i divisori del proposto numero 300.

(*A*)	(*B*)						
	1						
300	2						
150	2	4					
75	3	6	12				
25	5	10	15	20	30	60	
5	5	25	50	75	100	150	300
1							

Sia la formola $21abb$, di cui debbansi ritrovare tutti i divisori. Poichè non è divisibile per 2; si divida per 3, che gli si scriva di contro in (*B*), ed il quoziente $7abb$ di sotto in (*A*), si divida $7abb$ per 7, che gli si scriva di contro, ed il quoziente abb di sotto; dividasi abb per a, che gli si scriva di contro, ed il quoziente bb di sotto; indi si divida bb per b, che si scriva di

contro,

contro, e di sotto il quoziente *b*, che si divida per *b*; e gli si scriva di contro, e si avranno tutti i divisori primi 1, 3, 7, *a*, *b*, *b* della proposta quantità. Per avere i composti: si moltiplichi il 3 in 7, e nasce 21; si moltiplichino il 3, il 7, ed il 21 in *a*, e nascono 3*a*, 7*a*, 21*a*; si moltiplichino in *b* i divisori 3, 7, 21, *a*, 3*a*, 7*a*, 21*a*, e nascono 3*b*, 7*b*, 21*b*, *ab*, 3*ab*, 7*ab*, 21*ab*; si moltiplichino finalmente 3, 7 ec.; cioè tutti i superiiori in *b*, e nascono (ommessi i superflui, che nascono replicati) *bb*, 3*bb*, 7*bb*, 21*bb*, *abb*, 3*abb*, 7*abb*, 21*abb*, e la colonna (*B*) contiene tutti i divisori della quantità proposta.

(*A*)	(*B*)
	1
21*abb*	3
7*abb*	7, 21
abb	*a*, 3*a*, 7*a*, 21*a*
bb	*b*, 3*b*, 7*b*, 21*b*, *ab*, 3*ab*, 7*ab*, 21*ab*
b	*b*, *bb*, 3*bb*, 7*bb*, 21*bb*, *abb*, 3*abb*, 7*abb*, 21*abb*
1	

Similmente sia 2*abb* — 6*aac*. Si divida prima per 2, ed il quoziente *abb* — 3*aac* per *a*, ed il nuovo quoziente *bb* — 3*ac* per se medesimo, giacchè per nessuna quantità è divisibile, e però tutti i divisori sono, come nella colonna (*B*)

(*A*)	(*B*)
	1
2*abb* — 6*aac*	2
abb — 3*aac*	*a*, 2*a*
bb — 3*ac*	*bb* — 3*ac*, 2*bb* — 6*ac*, *abb* — 3*aac*, 2*abb* — 6*aac*
1	

56.

56. Ma se l'ultimo quoziente, o pure la formola stessa da prima proposta, fosse bensì composta, non però divisibile nel modo suddetto per alcuna quantità incomplessa, di modo che fossero complessi tutti i suoi divisori, la maniera per averli è diversa, ed è questa. Si ordini la quantità relativamente ad una lettera, come è stato detto al numero 24.; si riducano i termini alla medesima denominazione, se vi sono frazioni, indi si trovino tutti i divisori dell' ultimo termine composti dai divisori numerici, se vi sono, e dalla lettera di una dimensione, e se il massimo termine â coefficiente numerico, si dividano per ciascheduno di que' numeri, per i quali è divisibile esso coefficiente del massimo termine; per ognuno di questi divisori aggiunto, ed indi sottratto dalla lettera, per cui è ordinata la formola, si tenti la divisione; e tutti quelli, per i quali riesce, saranno tanti divisori della quantità proposta.

Sia la formola $y^3 - 4ayy + 5aay - 2a^3 = 0$. I divisori di una dimensione dell'ultimo termine sono a, $2a$. Devesi adunque provare la divisione per ciascun di questi aggiunto alla lettera y, indi sottratto (giacchè il coefficiente del massimo termine y^3 è l'unità) cioè per $y \pm a$, per $y \pm 2a$. Si divida primieramente per $y - 2a$, ed il quoziente è $yy - 2ay + aa$, che pure è divisibile per $y - a$ dando di quoziente $y - a$, quindi i divisori della proposta formola sono $y - a$, $y - a$, $y - 2a$, dal prodotto de' quali è nata.

Sia la formola $6y^4 - ay^3 - 21aayy + 3a^3y + 20a^4$. I divisori d'una dimensione dell'ultimo termine sono a, $2a$, $4a$, $5a$, $10a$, $20a$; e perchè il primo termine $6y^4$ è divisibile per 2, e per 3, si dovrà tentare la divisione per $y \pm \frac{a}{2}$, $y \pm a$, $y \pm 2a$, $y \pm \frac{5a}{2}$, $y \pm 5a$, $y \pm 10a$, $y \pm \frac{a}{3}$, $y \pm \frac{2a}{3}$, $y \pm \frac{4a}{3}$, $y \pm \frac{5a}{3}$, $y \pm \frac{10a}{3}$, $y \pm \frac{20a}{3}$. Ma perchè troppo nojosa fatica sarebbe il provare con tutti i divisori, per vedere fra i molti, quali debbansi scegliere, si faccia $y = z + a$, e si sostituisca in luogo di y, e sue potestà questo valore, e nascerà un'altra formola, cioè

$$\begin{array}{rrrrr}
6z^4 + & 24az^3 + & 36aazz + & 24a^3z + & 6a^4 \\
- & az^3 - & 3aazz - & 3a^3z - & a^4 \\
 & & -21aazz - & 42a^3z - & 21a^4 \\
 & & & + 3a^3z + & 3a^4 \\
 & & & & + 20a^4
\end{array}$$

ovvero, ciò che è lo stesso,

$$6z^4 + 23az^3 + 12aazz - 18a^3z + 7a^4$$

Dell'ultimo termine $7a^4$ di questa formola si trovino tutti i divisori, cioè a, e $7a$, che divisi per 2, e per 3 fanno $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{7a}{2}$, $\frac{7a}{3}$, e perchè si è fatto $y = z + a$, se questi divisori possono servire per la seconda formola data per z, serviranno anche per la prima data per y quando si accrescano della quantità a, cioè facendo $\frac{3a}{2}$, $\frac{4a}{3}$, $\frac{9a}{2}$, $\frac{10a}{3}$. Questi divisori adunque si paragonino

coi

coi divisori per la prima formola, e scelti quelli soli, che tra loro convengono, cioè $\frac{4a}{3}$, e $\frac{10a}{3}$, per questi aggiunti, e sottratti dalla y si tenti la divisione, che succede per $y+\frac{4a}{3}$. Ma se, ciò non ostante, rimangono ancora molti di numero i divisori scelti da questo paragone, si faccia $y=z-a$, e nascerà un'altra formola. Dai divisori ritrovati per questa si sottragga la quantità a, indi si paragonino con quelli, che si sono scelti per mezzo della seconda, e per quelli che convengono, che saranno in minor numero, si tenti la divisione. In questo modo operando successivamente con altre sostituzioni di $y=z+2a$, $y=z-2a$ ec. si potranno ridurre a quel minor numero, che sembrerà bastare.

57. Quando la proposta formola â il massimo termine moltiplicato per qualche numero, in luogo di usare della regola accennata per questo caso, può tornare più comodo il mutare la formola in un'altra, il di cui primo termine non sia moltiplicato, che per l'unità, ed indi ritrovare di questa i divisori, dai quali passare poi a quelli della proposta formola.

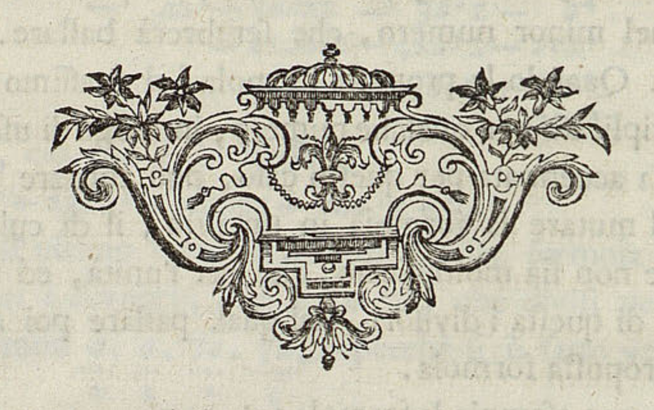
Sia per esempio la formola $3y^3 + 9ayy - 12aay - 12aab$.
$+ 3byy + 9aby$

Si faccia $3y=z$ (e generalmente $ny=z$, posto il coefficiente numerico dell' incognita eguale ad n) e però $y=\frac{z}{3}$, e sostituiti in luogo di y, e sue potestà i valori dati

per z, ſarà la formola :

$$\frac{z^3 + 9azz + 3bzz - 36aaz + 27abz - 108aab}{9}.$$ Si trovino i divisori di queſta (ommeſſo per ora il denominatore 9) che ſaranno $z + 12a$, $z - 3a$, $z + 3b$, e mettendo in conto il denominatore 9, ſe ne divida uno per 9, ovvero due per 3, e ſaranno, per eſempio, $z + 12a$, $\frac{z - 3a}{3}$, $\frac{z + 3b}{3}$; ma ſi è fatto $3y = z$, adunque ſi ſoſtituiſca nei diviſori in luogo di z queſto valore, ed averanſi $3y + 12a$, $y - a$, $y + b$, che ſono i tre diviſori della formola propoſta:

$$\begin{aligned} 3y^3 &+ 9ayy - 12aay - 12aab. \\ &+ 3byy + 9aby \end{aligned}$$



CAPO

CAPO II.

Delle Equazioni, e de' Problemi piani determinati.

58. EQuazione è un rapporto di uguaglianza, che due, o più quantità, sieno esse numeriche, geometriche, o fisiche, ânno tra loro assieme paragonate, o che ânno col zero se ad esso si paragonano. Il complesso di tutti que' termini, che avanti al segno d'egualità si scrivono, chiamasi il primo membro dell'equazione, ed il complesso di tutti quelli, che si scrivono dopo, chiamasi il secondo membro, ovvero l'omogeneo di comparazione. I termini dell'equazione sono omogenei quando ciascun di loro è della stessa dimensione, e però si dice essersi nell'equazione osservata la legge degl'omogenei, come nell'equazione $axx - bbx = a^3$, e così all'opposto dicesi non essersi osservata la legge degl'omogenei quando i termini tali non sono, come nell'equazione $x^4 - axx = a$.

59. Problema è una proposizione, in cui si domanda di fare, o di sapere alcune cose per mezzo di altre cose note, e di alcune condizioni, che si chiamano i dati del problema; siccome quelle, che si cercano, i quesiti o questioni si appellano.

60. I Problemi altri sono determinati, altri indeterminati; determinati sono quelli, che ânno soluzioni di numero finito, e determinato, cioè quelli, che o con una

sola

sola determinazione si possono sciorre, o se con più, di numero però finito, e determinato. Tale sarebbe il ricercare (*Fig.* 1.) dove debbasi tagliare la data retta *AB* in modo, che tutta abbia al maggior segmento quella ragione, che â il maggior segmento al minore; imperciocchè un solo punto in essa può darsi, per esempio *C*, onde nasca la proprietà, che si cerca. Lo stesso (*Fig.* 2.) sarebbe il ricercare nel diametro di un dato semicircolo *AED* quel punto, per esempio *C*, da cui alzando una perpendicolare *CE* terminata alla periferia, sia essa eguale alla terza parte del diametro, mentre due soli di questi punti egualmente lontani dal centro soddisfanno alla questione.

Che se verrà proposto di cercare fuori della data *AD* un punto *E* tale, che da esso condotte all'estremità della data *AD* le rette *EA*, *ED*, sia l'angolo *AED* retto; si troverà, che infiniti sono i punti *E*, che sciolgono il problema, cioè tutta la periferia *AED*, come è noto dall' Euclide; medesimamente se si cerchi nel diametro *AD* un punto *C*, da cui alzata la perpendicolare *CE* nel circolo, essa sia media proporzionale tra i segmenti *AC*, *CD*, si troverà, che ogni punto del diametro scioglie la questione, e perchè tali punti sono infiniti, infinite sono le soluzioni del problema, che però dicesi indeterminato.

I problemi determinati di una sola incognita ânno bisogno, gl'indeterminati di due; la maniera però di arrivare all'equazione è la stessa in quelli, ed in questi; ma de'

de' secondi tratterò particolarmente al Capo terzo.

61. Le quantità cognite, e date soglionsi denominare, come altrove si è detto, con le prime lettere dell'alfabeto; le incognite, e che si cercano, con una delle ultime avvertendo, che se la quantità, che si cerca, è una linea, debba essa avere sempre origine e principio da un punto fisso, e determinato. E comecchè ciò, che si cerca, si suppone già per fatto, e noto col chiamarlo, per esempio, x; quindi è, che da questa quantità supposta cognita vengono cognite e date, come si suol dire, *per l'Ipotesi*, altre che da questa dipendono. Così essendo (*Fig.* 2.) data $AD=a$, e supposto C il punto cercato, e però chiamata $AC=x$, sarà $CD=a-x$, e così si discorra di molte altre. In oltre sebbene molte quantità non sono espressamente date, qual'è la linea AD, lo sono però implicitamente, e come si dice, *per la costruzione*. Così nel triangolo rettangolo AED (*Fig.* 2.) quando sia data l'ipotenusa $AD=a$, il lato $ED=b$, sarà, per la 47. del primo di Euclide, dato pure il lato $AE=\sqrt{aa-bb}$. Così nel semicircolo AED; dato il diametro $AD=a$, il segmento $AC=b$, sarà $CD=a-b$, e per la 8. del 6. di Euclide sarà $CE=\sqrt{ab-bb}$; o pure chiamata $AC=x$, sarà $CE=\sqrt{ax-xx}$ data per l'ipotesi, e per la costruzione. Così nel triangolo rettangolo (*Fig.* 3.) ACB; abbassata dall'angolo retto B la perpendicolare BD, se sieno, per esempio, date le due $AC=a$, $AB=b$, saranno

pari-

parimente date tutte l'altre BC, BD, AD, DC; cioè $CB = \sqrt{aa - bb}$ per la 47. del primo d'Euclide, come si è veduto, e per l'8. del 6. sarà CD terza proporzionale di AC, e di CB; quindi sarà $= \frac{aa - bb}{a}$, per la 17. dallo stesso lib. AD sarà terza proporzionale di AC, e di AB; e però $= \frac{bb}{a}$; DB sarà media tra AD, e DC, o pure quarta proporzionale di AC, CB, AB; e però, per la 16. dello stesso libro, $= \frac{b\sqrt{aa - bb}}{a}$. Così (*Fig.* 4.) nel triangolo rettangolo ABC; se sia DH parallela a BC, e siano date $AB = a$, $BC = b$, $AD = x$, per la 4. del sesto saranno date $DH = \frac{bx}{a}$, $AH = \frac{x\sqrt{aa + bb}}{a}$, e così dicasi d'infinite altre.

62. Col supporre adunque già fatto, o noto ciò, che deve farsi, o sapersi, e maneggiando indifferentemente le quantità date, e quesite, si adempiano tutte le condizioni, che nella proposizione del problema si dimandano, e si arriverà alla equazione. Sia, come sopra, la retta AB (*Fig.* 1.) che debbasi tagliare *extrema & media ratione*. Sia $AB = a$, e sia C il punto, che si cerca; sarà $AC = x$, e però $CB = a - x$. La condizione impostaci è, che debba essere $AB, AC :: AC, CB$, cioè $a, x :: x, a - x$; ma per la natura della proporzione geometrica il prodotto degl'estremi è uguale al prodotto dei mezzi; adunque sarà $aa - ax = xx$, ed eccoci all'equazione. Sieno dati tre numeri,

meri, il primo ſia 4., il ſecondo 5., il terzo 10., e ſi cerchi un quarto numero tale, che ſe dal prodotto di queſto nel terzo ſi ſottragga il primo, ed il reſto per eſſo primo ſi divida; il quoziente ſia eguale al ſecondo numero dato. Sia x il numero cercato; adunque il prodotto di queſto nel terzo ſarà $10x$, e ſottraendo il primo, $10x - 4$, e dividendo per eſſo primo, $\frac{10x - 4}{4}$, ma per la preſcrizione del problema deve eſſere $\frac{10x - 4}{4}$ eguale al ſecondo numero dato 5; ecco adunque l'equazione $\frac{10x - 4}{4} = 5$.

Dati nel triangolo ABC (*Fig.* 4.) i lati $AC = a$, $BC = b$, e la baſe $AB = c$; ſi ricerca in eſſa il punto D tale, che alzata DH parallela a BC, ſia il quadrato di DH eguale al rettangolo di $AD \times DB$. Si chiami $AD = x$, adunque ſarà $DB = c - x$, e per i triangoli ſimili ABC, ADH ſarà $DH = \frac{bx}{c}$, e però adempiendo ciò, che il problema richiede, ſarà l'equazione $\frac{bbxx}{cc} = cx - xx$.

63. Se il dato triangolo ABC ſarà rettangolo in B non s'avrà a denominare $AC = a$, ma bensì $= \sqrt{bb + cc}$ per eſprimere con ciò la condizione data dell'angolo retto. Così ſe nel ſemicircolo AED (*Fig.* 2.) ſarà dato il diametro $AD = 2a$, il ſegmento $AC = b$, non però, perchè ſia data in conſeguenza la CE, ſi potrà eſprimere con una qualunque lettera, ma dovrà denominarſi per la

proprietà del circolo col farla $= \sqrt{2ab - bb}$ appunto per indicare, che essa sia ordinata del circolo al punto *C*; e ciò generalmente s'intenda doversi fare in tutti i casi di simil natura.

64. Ma ciò, che può fare qualche difficoltà si è, che il più delle volte le linee date nella figura, con cui viene proposto il problema, non bastano per avere quelle quantità, o sia denominazioni, che sono necessarie per giugnere alla equazione. Un tale caso sarebbe, se date di posizione (*Fig.* 5.) due rette indefinite *AE*, *AF*, ed il punto *C*, venisse proposto di condurre dal punto dato *C* la retta *CF* talmente, che formasse il triangolo *AEF* eguale a un dato piano. La espressione del triangolo *AEF* sarebbe la metà del prodotto di *AF* in *EG*, abbassata *EG* perpendicolare ad *AF*; sia adunque $AF = x$, ma non perciò sarà mai possibile inferire dalle sole descritte linee il valore di essa *EG*. In simili incontri fa d'uopo di comporre la figura conducendo parallele, alzando perpendicolari, formando triangoli simili, descrivendo circoli, o usando altri simili artifizj della Geometria comune, de' quali non è possibile assegnare regola alcuna, dipendendo essi dalle circostanze del problema, dall'industria, dalla pratica, e spesso dal caso; ordinariamente però sogliono servire le proposizioni 5. 13. 15. 27. 29. 32. 47. del primo libro di Euclide; alcune del secondo; le 20. 21. 22. 27. 31. 35. 36. del terzo; le 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. del sesto; ed alcune dell'undecimo, e duodecimo per i solidi. Nel pro-

proposto problema adunque dal punto dato C si conduca CD parallela ad EA, ed EG, CB perpendicolari ad FA prodotta. Poichè sono date di posizione le rette AE, AF, ed il punto C, saranno date di grandezza le AD, CB. Sia adunque $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$, ed il dato piano $= cc$. Poichè i triangoli FDC, FAE sono simili, come pure simili tra loro i triangoli DCB, AEG, saranno le analogie $DF, AF :: DC, AE :: BC, EG$; e però $DF, AF :: BC, EG$, cioè $a + x, x :: b, EG$, onde sarà $EG = \frac{bx}{a + x}$, e perchè il triangolo AEF, cioè la metà del prodotto di AF in EG deve essere eguale al dato piano cc; sarà finalmente l'equazione $\frac{bxx}{2a + 2x} = cc$.

65. La sola proposizione de' problemi, che fin quì ho presi per esempio, mi â immediatamente portata all' equazione appunto, perchè mi â comandato di fare, che due quantità fossero uguali; ma non così succede quando da alcune quantità date viene proposto di ritrovarne dell' altre senza qualche condizione, che espressamente all' equazione ci porti. Allora conviene con un pó d'arte procacciarsela, e ciò col ritrovare (componendo la figura, se è necessario) per mezzo di diverse proprietà, due differenti espressioni della medesima quantità, ed instituire fra esse l'equazione. Ho detto per mezzo di diverse proprietà, perchè la stessa proprietà comunque si vuole maneggiata darà sempre la medesima espressione. Addurrò tre

esempj, che per ora possono bastare.

Dato il triangolo CDB isoscele; (*Fig.* 6.) si dimanda il diametro del circolo $CADB$, a cui egli sia inscritto. Si faccia $CD = a$, $CB = BD = b$, $BA = x$, diametro ricercato, e si tiri la CA. Saranno simili i due triangoli ABC, BCE, per esser retti gl'angoli BCA, CEB, e però sarà AB, BC :: BC, BE; cioè x, b :: b, BE; onde $BE = \frac{bb}{x}$, ed è pure CE la metà di CD, onde $= \frac{1}{2}a$, e per l'angolo retto CEB sarà $\overline{CB}^2 = \frac{aa}{4} + \frac{b^4}{xx}$; ma il quadrato di CB è anche $= bb$, e però sarà l'equazione $bb = \frac{aa}{4} + \frac{b^4}{xx}$.

Dati nel triangolo ABC (*Fig.* 7.) i tre lati, ed abbassata la perpendicolare AE sopra BC dall'angolo A, si domandano i due segmenti BE, EC. Sia $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $BE = x$, sarà $EC = c - x$. Per la 47. del primo d'Euclide sarà il quadrato di AE uguale al quadrato di AB meno il quadrato di BE, cioè $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$; ma per la stessa sarà pure $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2$, adunque $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2$, e poste l'espressioni algebraiche, sarà $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$.

In altro modo ancora. Si conduca EF perpendicolare ad AB. Per l'8. del 6. d'Euclide sarà AB, BE :: BE, BF, cioè a, x :: x, BF, e però $BF = \frac{xx}{a}$; adunque

$AF =$

$AF = a - \frac{xx}{a}$; ma per la stessa proposizione 8. sarà pure AF, AE : : AE, AB, e però sarà $\overline{AE}^2 = aa - xx$. Condotta dal punto E la retta EM perpendicolare ad AC, con lo stesso raziocinio si troverà $\overline{AE}^2 = bb - cc + 2cx - xx$, e paragonati fra loro questi due valori, avrassi l'equazione, come prima, $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$.

Dato il quadrante AHM (*Fig.* 8.) e le tangenti AI, HK dei due archi AH, HD; si dimanda la tangente AB della somma de' due archi dati. Sia il raggio $CA = a$, $AI = b$, $HK = c$, $AB = x$. Per avere una equazione si tiri normale sopra AC dal punto D la DE; quindi per i triangoli simili CBA, CDE si troveranno i valori di CE, e di DE; si procuri adunque di vedere, se ci venga fatto di denominare in un' altra maniera la stessa DE; e perciò si tiri DF perpendicolare a CH; e per mezzo de' triangoli simili CAI, CEO si averanno le EO, CO; similmente per mezzo de' triangoli CHK, CFD simili averassi la FD; e dai triangoli simili CEO, FOD si caverà OD; e però sarà $ED = EO + OD$, che ci darà l'equazione analitica.

'O riferito il solo ordine, che potrebbe tenersi per giugnere all' equazione, ommettendo le attuali operazioni, perchè in altro luogo si scioglierà il problema compitamente.

66. Conviene pure usare qualche sorta d'industria per giugnere all'equazione in que' Problemi, ne' quali si tratta

tratta di angoli, e ciò con l'artifizio di paſſare dalle proprietà degl' angoli a quelle delle linee, che entrano, o poſſono entrare nel problema. Ne prendo un' eſempio dalla propoſizione 10. del lib. 4. d' Euclide. Debbaſi (*Fig.* 9.) ſopra la retta *AB* coſtruire il triangolo *ABC*, il di cui angolo *A* ſia la metà tanto dell'angolo *ABC*, quanto dell' angolo *ACB*. Il triangolo *ABC* ſia il ricercato, adunque ſaranno tra loro eguali i due angoli *ACB*, *ABC*, quindi eguali i lati *AC*, *AB*, e ſe s'intenda condotta la retta *CD* tale, che divida in due egualmente l'angolo *ACB*, ſaranno ſimili i due triangoli *ACB*, *CDB*, e ſi avrà l'analogia *AB*, *BC* :: *BC*, *BD*, ma ſi â $BC = DC = AD$, adunque ſarà *AB*, *AD* :: *AD*, *DB*, ed ecco ridotto il problema propoſto all' altro di dividere la data *AB* *extrema & media ratione*. Sciolto pertanto queſto ſecondo problema, cioè ritrovato il punto *D*, ſarà ſciolto il propoſto ancora, perchè diviſa *DB* per metà in *E*, ſe ſi alzerà la perpendicolare *EC*, che incontri in *C* l'arco *BC* del raggio *AB*, e ſi conducano dal punto *C* le rette *CA*, *CB*, il triangolo *ACB* ſarà il ricercato.

67. Ritrovata adunque l'equazione del problema, fa d'uopo da eſſa ricavare i valori della incognita, cioè ridurre eſſa incognita ad eſſere eguale a ſole quantità date, nel che conſiſte la ſoluzione del problema, e ciò diceſi riſolvere l'equazione.

Ma prima è bene richiamare alla memoria alcuni aſſiomi; cioè

1.

1. Se a due cose eguali si aggiungeranno, o da esse si sottrarranno cose eguali, le somme, o differenze saranno parimente eguali.

2. Se cose eguali si moltiplicheranno, o si divideranno per cose eguali, i prodotti, o i quozienti saranno eguali.

3. Se da cose eguali si caverà radice di indice eguale, i risultanti saranno eguali.

4. Se cose eguali si eleveranno a potestà di esponente eguale, i risultanti saranno eguali.

Dal primo di questi assiomi si ricava, che se si vorrà, che un qualunque termine dell'equazione, il quale sia da una parte del segno d'egualità, passi dall'altra, si potrà sempre farlo senza punto togliere l'eguaglianza. Sia l'equazione $ax + bb = -xx + cc$; si aggiunga xx all'uno, ed all'altro membro dell'equazione, sarà $ax + bb + xx = -xx + cc + xx$, ma $-xx + xx$ si elidono, e rimane $ax + bb + xx = cc$; ed ecco il termine xx passato nel primo membro dell'equazione, da cui se in oltre si sottrarrà bb, sarà $ax + bb + xx - bb = cc - bb$; ma $bb - bb$ si elidono, e rimane $ax + xx = cc - bb$, ed ecco il termine bb passato nel secondo membro dell'equazione. Adunque generalmente quando vogliasi, che un qualunque termine passi da una parte all'altra del segno d'egualità, basterà scriverlo nell'altra con mutargli il segno. In conseguenza di ciò si potrà adunque rendere a nostro talento positivo un qualunque termine, che nell'equazione sia negativo, e vicendevolmente; e ciò con lo scriverlo col segno mutato dalla

dalla opposta parte del segno d'egualità a quella, in cui si trova; e però $aa - xx = bb$ sarà lo stesso, che $aa - bb = xx$, o sia $xx = aa - bb$. Quindi se nell'uno, e nell'altro membro dell'equazione vi sarà lo stesso termine, ed affetto dal medesimo segno, potrà esso da ambi i membri cancellarsi, senza togliere l'eguaglianza, come se fosse $ax - xx = bb - xx$, si scriverà $ax = bb$; imperciocchè trasportando dalla opposta parte il termine $- xx$, sarebbe $ax - xx + xx = bb$, o pure $ax = bb - xx + xx$, ma $- xx$ e $+ xx$ si elidono; adunque sarà $ax = bb$. Lo stesso segue se in luogo di trasportare il termine ad ambi i membri comune, esso ad ambi si aggiunga, se nell'equazione è negativo, o si sottragga, se è positivo; così se è $ax - xx = bb - xx$, sarà anche $ax - xx + xx = bb - xx + xx$, cioè $ax = bb$.

68. Dal secondo assioma si ricava, che se un'equazione averà delle frazioni si potrà sempre, senza togliere l'egualità, da esse liberare con ridurre ciascun termine al comun denominatore, ed indi ommettere esso denominatore, appunto perchè quantità eguali per eguali moltiplicate fanno prodotti eguali. Sia $a - \frac{xx}{b} = b$; riducendo al comune denominatore sarà $\frac{ab - xx}{b} = \frac{bb}{b}$, e moltiplicando ambi i membri dell'equazione per b, cioè ommettendo esso denominatore b, sarà $ab - xx = bb$. E se in oltre si voglia, che il termine $- xx$ sia positivo, si farà $ab = bb + xx$, o sia (che è lo stesso) $xx + bb = ab$, o pu-

re

re $xx = ab - bb$. Sia $\frac{ax}{2} - \frac{bxx}{a} = ab$, riducendo al comune denominatore sarà $\frac{aax - 2bxx}{2a} = \frac{2aab}{2a}$, e moltiplicando l'uno, e l'altro membro per $2a$; averassi $aax - 2bxx = 2aab$. E se si voglia di più, che il termine $2bxx$ sia positivo, e in oltre che tutti i termini, i quali contengono la lettera x, sieno da una parte del segno d'egualità, si faccia $2bxx - aax = -2aab$, o riducendo l'equazione al zero, $2bxx - aax + 2aab = 0$.

69. Per lo stesso assioma si potrà liberare qualunque lettera, a piacere, nell'equazione, o sua potestà dal coefficiente, cioè da quella quantità, in cui essa sia per avventura moltiplicata, e ciò dividendo ciascun termine per esso coefficiente: Sia pertanto $2bxx - aax = -2aab$, e debbasi liberare xx dal coefficiente $2b$; adunque dividendo l'uno, e l'altro membro dell'equazione per la stessa quantità $2b$, i quozienti saranno eguali, cioè $\frac{2bxx - aax}{2b} = \frac{-2aab}{2b}$, e però $xx - \frac{aax}{2b} = -aa$. Sia $ax - \frac{a^3}{b} = bb - \frac{3bxx}{2a} - bx$, e si voglia, che la xx sia positiva, libera dalle frazioni, e da' coefficienti, e che tutti i termini, che in qualunque modo contengono la lettera x, sieno da una parte del segno d'egualità, e gli altri dall' altra. Si scriva adunque $\frac{3bxx}{2a} + bx + ax = bb + \frac{a^3}{b}$; si moltiplichi per $2a$ ciascun termine,

mine, e viene l'equazione $3bxx + 2abx + 2aax = 2abb + \frac{2a^4}{b}$,
si divida finalmente ciascun termine per $3b$, e sarà l'equazione $xx + \frac{2abx + 2aax}{3b} = \frac{2a^4}{3bb} + \frac{2ab}{3}$, che à tutte le condizioni ricercate.

70. Dal quarto assioma si ricava, che se una equazione conterrà radicali, o sordi, si potrà da essi liberare scrivendo il termine, o i termini sordi da una parte del segno d'egualità, ed i razionali dall'altra, indi facendo il quadrato dell' uno, e dell' altro membro dell' equazione, se la radice è quadrata; il cubo se è radice cuba ec. Così essendo $\sqrt{aa - xx} + a = x$ si scriva, posto il termine a dall' altra parte del segno d'egualità, $\sqrt{aa - xx} = x - a$, e però quadrando, $aa - xx = xx - 2ax + aa$; cioè $2xx - 2ax = 0$, o sia $x - a = 0$, dividendo per $2x$ comune ad ambi i membri; Così essendo $\sqrt[3]{aax - x^3} - a + x = 0$; si scriva $\sqrt[3]{aax - x^3} = a - x$, e fatti i cubi, sarà $aax - x^3 = a^3 - 3aax + 3axx - x^3$, cioè $3axx - 4aax + a^3 = 0$, o sia $3xx - 4ax + aa = 0$, dividendo per a.

Che se i termini radicali fossero due o più, onde in una operazione sola non sparissero, essa si ripeta fino che bisogna. Così $\sqrt{bx} = a + \sqrt{ax}$ si scriva $\sqrt{bx} - \sqrt{ax} = a$, e quadrando, $bx + ax - 2\sqrt{abxx} = aa$, cioè $bx + ax - aa = 2\sqrt{abxx}$, e di nuovo quadrando, $bbxx + aaxx + a^4 + 2abxx - 2aabx - 2a^3x = 4abxx$, cioè $bbxx - 2abxx +$

aaxx —

$aaxx - 2aabx - 2a^3x + a^4 = 0$. Così $y = \sqrt{ay + yy} - a\sqrt{ay - yy}$, quadrando, sarà $yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy}$; cioè $ay = a\sqrt{ay - yy}$, e di nuovo quadrando, $aayy = a^3y - aayy$, vale a dire $2aayy = a^3y$, o sia $2y = a$.

71. Premesse queste cose, è facile la maniera di risolvere le equazioni per avere in quantità date il valore della incognita, che serve alla soluzione del problema. Ma prima si suppongano le equazioni liberate dalla asimmetria, cioè da' radicali nel caso, che l'incognita fosse sotto al vincolo, ed indi ridotte all' espressione più semplice cancellando que' termini, che si elidono, se tali ne avesse; se l'uno e l'altro membro fossero per la stessa quantità moltiplicati, dividendoli; o se fossero divisi, per essa moltiplicandoli; come, per esempio, se fosse $\frac{axx - aax + aab}{b} = \frac{a^3 + aab}{b}$ si ridurrebbe ad essere $xx - ax = aa$. In oltre per primo termine dell' equazione si intenda il complesso di tutti i termini, che contengono l'incognita alla massima potestà; per secondo termine il complesso di tutti i termini, che contengono la incognita alla potestà di un grado inferiore, e così di mano in mano; e per termine cognito il complesso di tutti i termini, che in nessun modo essa incognita contengono. Quindi nell' equazione $axx - bxx - bbx - aax = a^3 - b^3$, o sia $axx - bxx - bbx - aax + b^3 - a^3 = 0$, sarà $axx - bxx$, cioè $xx \times \overline{a - b}$ il primo termine; $-bbx - aax$, cioè

$x \times \overline{-aa-bb}$ il ſecondo ; $-a^3+b^3$ il cognito. Nell'equazione $aaxx-abxx+a^4-b^4-a^3b=0$ ſarà $\overline{aa-ab}\times xx$ il primo termine ; il ſecondo manca ; ed $a^4-b^4-a^3b$ il cognito. Nell'equazione $ax^3+bx^3-aaxx-a^4=0$ ſarà $\overline{a+b}\times x^3$ il primo ; $-aaxx$ il ſecondo ; il terzo manca ; e $-a^4$ l'ultimo, o il cognito; e così dicaſi dell'altre equazioni. E quì deveſi notare, che il termine, per eſempio, $aaxx-bbxx$ (il che s'intenda di qualunque altro compoſto di ſegni contrarj) può eſſere quantità poſitiva, o negativa, e ſarà poſitiva ſe aa ſia maggiore di bb, negativa ſe all'oppoſto ; e però ſe ſi dirà in appreſſo di rendere poſitivo un ſimil termine nell'equazione, biſognerà a ciò avere riguardo.

72. Ciò poſto ; per riſolvere le equazioni, in primo luogo ſe l'equazione â frazione, nel di cui denominatore ſia l'incognita, ſi riduca al comun denominatore ; in ſecondo luogo ſi renda poſitivo il termine della maſſima poteſtà dell' incognita, e ſcritti da una parte del ſegno d'egualità tutti i termini nell' ordine loro, che contengono eſſa incognita, ſi ſcrivano dall'altra i cogniti ; in terzo luogo ſe il primo termine, cioè quello della maſſima poteſtà dell'incognita, aveſſe un denominatore, ſi liberi dalla frazione nel modo detto al num. 68., e finalmente ſe aveſſe coefficiente, cioè ſe foſſe moltiplicato in qualche quantità data, da eſſo coefficiente ſi liberi (n. 69.)

E' facile il vedere, che in queſta guiſa operando, ſe l'equa-

l'equazione avrà l'incognita a una sola dimensione, sarà ella anco interamente risoluta, e ridotta la stessa incognita eguale a sole quantità date, che è quanto si pretende di fare. Sia l'equazione $aa - ff = \frac{bbx - aax}{2m}$, e sia aa maggiore di bb. Per rendere positivo adunque il termine dell'incognita si scriva $\frac{aax - bbx}{2m} = ff - aa$, e liberando dal denominatore, e coefficiente, sarà $x = \frac{2m \times \overline{ff - aa}}{aa - bb}$, valore interamente cognito. Se fosse aa minore di bb, in questo caso il termine dell'incognita $\frac{bbx - aax}{2a}$ sarebbe positivo, nè occorrerebbe trasportarlo, e si avrebbe $x = \frac{2m \times \overline{aa - ff}}{bb - aa}$.

73. Anzi quando anche l'incognita sia elevata a qualunque potestà, purchè alla stessa in tutti i termini ne' quali si trova, cioè (che vuol dire lo stesso) purchè l'incognita formi un sol termine, per l'assioma 3. si risolverà l'equazione, e si avrà essa incognita eguale a sole quantità date col estrarre dall'uno, e dall'altro membro dell'equazione la radice di quell'indice, di cui è la potestà. Sia l'equazione $bb = aa - \frac{axx - bxx}{2c}$. Per rendere positivo il termine dell'incognita si scriva $\frac{axx + bxx}{2c} = aa - bb$, e liberando dalla frazione, e dal coefficiente, $xx = \frac{2c \times \overline{aa - bb}}{a + b}$,

cioè

cioè $xx = 2ac - 2bc$, facendo l'attual divisione per $a + b$, giacchè si può, e finalmente cavando la radice quadrata, sarà $x = \pm\sqrt{2ac - 2bc}$. Ho posto alla radice il segno ambiguo per ciò, che si è detto al num. 15. Per la stessa ragione se fosse $x^3 = a^3 + b^3$, si averebbe $x = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$, e così dell'altre generalmente.

74. Ma se l'equazione contiene l'incognita al quadrato elevata, e in oltre il rettangolo, o sia il prodotto della stessa incognita nelle quantità note, cioè il secondo termine, (e dicesi equazione di quadratica affetta, siccome quando manca il secondo termine di quadratica semplice si appella) preparata essa come si è detto, all'uno, ed all'altro membro della equazione si aggiunga il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine (vale a dire il quadrato della metà di quella quantità cognita intera, o rotta, che moltiplica la incognita) ed il primo membro, come è manifesto, sarà sempre un quadrato, la di cui radice sarà il complesso dell'incognita, e della metà di esso coefficiente con il suo segno naturale; e però estraendo la radice, questo complesso sarà eguale alla radice quadrata del secondo membro, e trasportando la metà del coefficiente, come quantità cognita, sarà finalmente la incognita eguale alla somma, o differenza (secondo la natura de' segni) della radicale, e di essa metà del coefficiente. Sia l'equazione $xx + 2ax = bb$; si aggiunga all'uno, ed all'altro membro il quadrato della

metà

metà del coefficiente del secondo termine, cioè aa, e sarà $xx + 2ax + aa = aa + bb$, e cavando la radice, $x + a = \pm\sqrt{aa + bb}$, e trasponendo, $x = \pm\sqrt{aa + bb} - a$.

Sia l'equazione $bbx - aax - mxx + \frac{aabb}{m} = 0$. Rendendo positivo il massimo termine, ed ordinando l'equazione, sarà $mxx + aax - bbx = \frac{aabb}{m}$, e dividendo per m, $xx + \frac{aax - bbx}{m} = \frac{aabb}{mm}$; adunque aggiungendo ad ambi i membri il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4mm}$, si avrà $xx + \frac{aax - bbx}{m} + \frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4mm} = \frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4mm} + \frac{aabb}{mm}$, e cavando la radice, $x + \frac{aa - bb}{2m} = \pm\sqrt{\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4mm} + \frac{aabb}{mm}}$, e riducendo al comune denominatore il radicale, e trasponendo il termine cognito $\frac{aa - bb}{2m}$, sarà $x = -\frac{aa + bb}{2m} \pm\sqrt{\frac{a^4 + 2aabb + b^4}{4mm}}$; ma la radice si può attualmente estrarre, ed è tanto $\frac{aa + bb}{2m}$, quanto $-\frac{aa - bb}{2m}$, per ragione del segno ambiguo $\pm$, e però saranno due i valori della x, uno $x = \frac{-aa + bb + aa + bb}{2m}$, o sia $x = \frac{bb}{m}$, e l'altro $x = \frac{-aa + bb - aa - bb}{2m}$, o sia $x = -\frac{aa}{m}$.

75. L'ambiguità adunque del segno, che seco porta la

la estrazione della radice quadrata, somministra due valori dell'incognita, i quali possono essere ambi positivi, ambi negativi, un positivo, e negativo l'altro, e talora ambi immaginarj, secondo le quantità note onde sono composti. Nell' equazione finale, per esempio, $x = \pm\sqrt{aa+bb} - a$ un valore, cioè $\sqrt{aa+bb} - a$ sarà positivo, perchè essendo $\sqrt{aa+bb}$ maggiore di a, la differenza è positiva; l'altro valore, cioè $-\sqrt{aa+bb} - a$ sarà negativo, come è manifesto. Nell'equazione $x = a \pm \sqrt{aa-bb}$ (supposto b minore di a) ambi i valori saranno positivi, perchè $\sqrt{aa-bb}$ è minore di a; e per la stessa ragione nell'equazione $x = \pm\sqrt{aa-bb} - a$ ambi i valori saranno negativi; che se fosse b maggiore di a, ambi sarebbero immaginarj, come ô notato al n. 15., perchè $\sqrt{aa-bb}$ sarebbe radice di quantità negativa. Nell' equazione $x^4 = a^4 - b^4$, che esigge due volte la estrazione della radice quadrata, cioè $xx = \pm\sqrt{a^4 - b^4}$, ed indi $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{a^4 - b^4}}$, quattro sono i valori, due reali positivo l'uno, e negativo l'altro, cioè $\pm\sqrt{+\sqrt{a^4 - b^4}}$, supposta b minore di a, gl'altri due immaginarj, cioè $x = \pm\sqrt{-\sqrt{a^4 - b^4}}$, e quando b sia maggiore di a tutti quattro saranno immaginarj; in proporzione si discorra dell' altre equazioni. I valori negativi, che diconsi ancora falsi, sono niente meno reali de' positivi, e questa sola diversità ânno, che

se

se nella soluzione del problema i positivi si prendono dal punto fisso principio dell'incognita verso una parte, i negativi si prendono dallo stesso punto verso la parte opposta. Sia (*Fig.* 10.) A il principio dell'incognita x di un problema, e l'equazione finale sia, per esempio $x = \pm a$; si prenda $AB = a$, fissato adunque, che da A verso B sieno i positivi, sarà $AB = a$ il valore positivo di x, ed in conseguenza, presa $AC = AB$, ma dalla parte contraria del punto A; sarà $AC = -a$ il valore negativo di x, ed il problema avrà due soluzioni, una nel punto B, l'altra nel punto C. Ma di tutto ciò si vedrà meglio la pratica ne' problemi, che scioglierò in appresso.

76. Qualora pertanto l'equazione, a cui le condizioni de' problemi ci ânno condotti, ci somministra soli valori immaginarj, ciò vuol dire, che il problema non â soluzione alcuna, e che è impossibile. Lo stesso si concluda quando la equazione finale ci porta all'assurdo, come se ci dasse quantità finita eguale al zero, o il tutto eguale alla parte, o cose simili. Tale la ritroverebbe, chi nella retta $AB = a$ (*Fig.* 1.) ricercasse il punto C, onde fosse il quadrato di tutta eguale alla somma de' quadrati delle parti; imperciocchè fatta $AC = x$, sarebbe $aa = xx + aa - 2ax + xx$, cioè $2xx - 2ax = 0$, e però $x = a$, vale a dire la parte eguale al tutto. Assurda pure l'avrebbe chi, alzata sulla retta AB (*Fig.* 11.) la perpendicolare indefinita BH, cercasse in essa un punto C, da cui conducendo al dato punto A la retta CA, fossero parallele le due CB, CA;

CA; imperciocchè fatta $BA = a$, $BC = x$, e presa $BD = \frac{1}{2}x$, e condotta DM parallela a BA, sarebbe, per i triangoli CBA, CDM simili, $DM = \frac{1}{2}a$; ma se CA, CB sono parallele, deve essere DM eguale a BA, e però $\frac{a}{2} = a$, equazione impossibile.

Se taluno però pretendesse, che la prima delle due superiori equazioni, cioè $2xx - 2ax = 0$ non sia altrimenti assurda, ma che ci somministri due valori benchè inutili, però reali, fondato sulla ragione, che dividendo l'equazione per $2x - 2a$, risulta $x = 0$ valore reale, che scioglie il problema; imperocchè presa $x = 0$, cioè divisa la linea AB nel punto A, una parte di essa sarà zero, e l'altra sarà a; e però il quadrato di tutta eguale al quadrato delle parti, cioè $aa = 0 + aa$, o sia $aa = aa$; e dividendo per $2x$ l'equazione, risulta $x = a$ valore reale, che scioglie il problema, dividendo la linea nel punto B; a chi, come dissi, così pretendesse non mi opporrei per avventura; ma qualunque siasi la giusta idea di questa, e simili equazioni, egli è certo però, che nulla di più ci fa sapere, se non che il quadrato della linea AB è eguale al quadrato della linea AB, e la linea eguale a se stessa.

Ho preso per esempio d'equazione, che porta all' assurdo, quella che mi dà una quantità finita eguale a zero, o il tutto eguale alla parte; ciò però s'intenda quando la incognita non possa esser grandezza infinita, ed il problema non sia più, che determinato, perchè in questi casi pos-

possono esser verissime tali equazioni, come si vedrà altrove.

77. S'incontrano pure alle volte altre equazioni, le quali dall'una, e dall'altra parte del segno d'egualità contengono le stesse quantità, e che per conseguenza ridotte vengono alla fine a concludere $o = o$. Queste tali equazioni, che si chiamano identiche, ci fanno sapere più di quello, che nella proposizione da noi si ricercava, mentre che sparendo da esse affatto l'incognita, e portandoci a conclusione vera (perchè è sempre vero, che il zero è eguale al zero) ci fanno conoscere, che il valore dell'incognita è quello, che si vuole, e che però la proposizione non è un problema, ma un teorema. Eccone un'esempio. Nel dato rettangolo *ACDE* (*Fig.* 12.) condotta la parallela *BF* ad *AE* dal dato punto *B*, si dimanda in essa un punto tale *H*, che tirate agli opposti angoli le rette *HA*, *HC*, *HD*, *HE*, sia la somma de' quadrati di *HA*, *HD* eguale alla somma de' quadrati di *HE*, *HC*. Sia $AB = a$, $BC = b$, $CD = e$, e supposto, che *H* sia il punto cercato, sarà $BH = x$, e però $HF = e - x$. Il quadrato adunque di *HA* sarà $= aa + xx$, di *HC* sarà $= bb + xx$, di *HD* sarà $= bb + ee - 2ex + xx$, di *HE* sarà $= aa + ee - 2ex + xx$, e però l'equazione $aa + xx + bb + ee - 2ex + xx = bb + xx + aa + ee - 2ex + xx$, cioè $o = o$, vale a dire, che dovunque si prenda nella retta *BF* il punto *H*, si verificherà sempre la ricercata proprietà.

78. Le equazioni, che ridotte contengono la inco-

gnita ad una sola dimensione, diconsi equazioni semplici, e del primo grado; quelle, che la contengono elevata al quadrato, sieno esse quadratiche semplici o affette, si dicono del secondo grado; quelle, che la contengono elevata al cubo, comunque siasi degli altri termini, si dicono del terzo grado, e così del quarto, del quinto ec. le altre in proporzione. Quindi i problemi, che da equazioni semplici, o del secondo grado vengono espressi, si dicono problemi piani, perchè si costruiscono colla sola geometrìa comune dell'Euclide, cioè *circino & regula*; gli altri tutti si dicono solidi, perchè per la costruzione loro, si richiede la descrizione di certe curve, che luoghi solidi pure si chiamano. Della risoluzione, e costruzione de' problemi solidi nulla quì dirò, riserbandomi a trattarne espressamente nel Capo IV.

79. Vi sono molte equazioni, che sembrano a prima vista di quel grado, che dall'esponente massimo dell'incognita viene indicato, ma che però, debitamente trattandole, s'abbassano a grado inferiore. Di questo genere sono tutte quelle, le quali oltre il primo termine, cioè quello della massima potestà dell'incognita, ed il termine affatto cognito, un'altro solo ne contengono, in cui la incognita abbia la potestà, che sia la radice quadrata della potestà del primo termine; come sarebbe $x^4 - 2aaxx = b^4$, la quale maneggiata colla regola delle quadratiche affette si riduce ad essere $xx = aa \pm \sqrt{a^4 + b^4}$, e però $x = \pm \sqrt{aa \pm \sqrt{a^4 + b^4}}$. Istessamente $x^6 + a^3x^3 - b^6 = 0$, che

che ridotta nello ſteſſo modo ſi trova eſſere $x^3 = \frac{-a^3 \pm \sqrt{a^6 + 4b^6}}{2}$, e però $x = \sqrt[3]{\frac{-a^3 \pm \sqrt{a^6 + 4b^6}}{2}}$, ed infinite altre di ſimil natura. Sono pure dello ſteſſo genere quelle, che per mezzo dell'eſtrazione delle radici poſſono abbaſſarſi a grado inferiore; così $x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2bbxx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$, eſſendo il primo membro dell'equazione un quadrato, la di cui radice è $xx - ax - bb$, ſarà l'equazione abbaſſata $xx - ax - bb = \pm b\sqrt{aa + bb}$. Così nell'equazione $x^3 + 3axx + 3aax = b^3$ ſe ſi aggiunga a^3 all'uno, ed all'altro membro, ſarà $x^3 + 3axx + 3aax + a^3 = a^3 + b^3$, ma il primo membro è un cubo, la di cui radice è $x + a$, adunque l'equazione abbaſſata ſarà $x + a = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Ma non è ſempre così facile il riconoſcere, quale quantità debba aggiungerſi, o ſottrarſi dal primo membro dell'equazione, acciocchè egli divenga una poteſtà perfetta, nè ſi può aſſegnarne metodo alcuno, onde in queſti caſi potrà ſolo aver uſo la pratica, e l'induſtria dell'Analiſta.

80. Ma ſe il propoſto problema foſſe di tale natura, che o difficilmente, o in neſſun modo una ſola incognita aſſunta baſtaſſe per avere tutte quelle denominazioni, che all'invenzione della equazione ſono neceſſarie, in queſto caſo ſi prende una, due, tre, e quante abbiſognano incognite di più, mentre che eſſendo il problema determinato di natura ſua, ci ſomminiſtrerà ſempre materia di al-

altrettante equazioni, quante ſono le incognite aſſunte; col mezzo di ciaſcuna di queſte equazioni ſi elimina una delle incognite, cioè ſe ne trova il valore dato per le rimanenti, e per le cognite, fino a che ſi giunga finalmente all'ultima equazione, la quale conterrà un' incognita ſola. Cogli eſempj s'intenderà meglio il modo di queſte operazioni.

Sieno in primo luogo due equazioni ſemplici, cioè del primo grado, per eſempio, $a + x = b + y$, e $2x + y = 3b$, e ſi voglia eliminare la y ritenendo la x; per mezzo di quella, che ſi vuole, delle due equazioni, per eſempio della prima, ſi trovi il valore della y colla debita traſpoſizione de' termini, e ſarà $y = a + x - b$; queſto valore ſi ſoſtituiſca nella ſeconda in luogo della y, e ſi avrà la nuova equazione $2x + a + x - b = 3b$, cioè $x = \frac{4b - a}{3}$, e ſoſtituito queſto valore in una delle due equazioni propoſte in luogo della x, ſi avrà il valore della $y = \frac{2a + b}{3}$. Ciò potevaſi anche ottenere col ricavare da ambe le equazioni i due valori della y, ed aſſieme paragonali, imperciocchè dalla prima equazione ſi ricava $y = a + x - b$, dalla ſeconda $y = 3b - 2x$, e però ſarà $a + x - b = 3b - 2x$, cioè $x = \frac{4b - a}{3}$, come prima.

81. Nello ſteſſo modo ſi opererà quando le equazioni contengano la incognita, che ſi vuol'eliminare, elevata alla ſeconda dimenſione, mentre per mezzo di una delle

delle due date equazioni, o con la sola trasposizione de' termini, o colle regole delle quadratiche semplici, o affette, se ne potrà sempre avere il valore da sostituirsi nell' altra equazione. Sieno le due equazioni $xx + 5ax = 3yy$, e $2xy - 3xx = 4aa$, e si voglia eliminare la y, la seconda darà $y = \frac{4aa + 3xx}{2x}$, e però $yy = \frac{16a^4 + 24aaxx + 9x^4}{4xx}$, e sostituito questo valore nella prima, sarà essa $xx + 5ax = \frac{48a^4 + 72aaxx + 27x^4}{4xx}$, cioè $23x^4 - 20ax^3 + 72aaxx + 48a^4 = 0$. Che se si voglia eliminare la x, ritrovato il di lei valore per quella, che si vuole, delle due equazioni, per esempio per la seconda, cioè $x = \frac{y}{3} \pm \frac{\sqrt{yy - 12aa}}{3}$, e sostituito nella prima, sarà essa $\frac{2yy - 12aa \pm 2y\sqrt{yy - 12aa}}{9} + \frac{5ay \pm 5a\sqrt{yy - 12aa}}{3} = 3yy$, e liberando dai radicali, ed ordinando l'equazione, sarà dopo un lungo calcolo $621y^4 - 810ay^3 + 648aayy + 360a^3y + 2844a^4 = 0$, e dividendo per 9 sarà finalmente $69y^4 - 90ay^3 + 72aayy + 40a^3y + 316a^4 = 0$.

82. Generalmente per le equazioni, nelle quali l'incognita, che si vuole eliminare, sia a qualunque grado elevata in ambe le equazioni; si trovi per mezzo di ciascuna di esse il valore della massima potestà della stessa incognita, cioè posta essa massima potestà sola da una parte

del

del ſegno d'egualità, ſi pongano dall'altra parte tutti gli altri termini, e queſti due valori tra loro paragonati ci daranno un'equazione di grado inferiore; ſi ripeta la ſteſſa operazione fino a tanto, che ſi abbia un'equazione affatto ſemplice riſpetto ad eſſa incognita, ed in conſeguenza il ſuo valore eſpreſſo per l'altra incognita, e per le cognite, il qual valore ſi ſoſtituiſca in una delle date equazioni in luogo dell'incognita, e ſue poteſtà, e ſi avrà un' equazione eſpreſſa con l'altra ſola incognita, e con le cognite.

Sieno le due equazioni $y^3 + aay = bxx$, e $y^3 - bxx = aax$, e ſi voglia eliminare la y; ſarà dunque per la prima $y^3 = bxx - aay$, per la ſeconda $y^3 = aax + bxx$, e però $bxx - aay = aax + bxx$, cioè $-x = y$, e fatte le debite ſoſtituzioni in quella, che ſi vuole, delle due equazioni, ſi avrà $-x^3 - aax = bxx$. Sieno le due equazioni del numero antecedente $xx + 5ax = 3yy$, $2xy - 3xx = 4aa$, e ſi voglia eliminare la x. Sarà adunque, per la prima, $xx = 3yy - 5ax$, per la ſeconda, $xx = \frac{2xy - 4aa}{3}$, e però ſarà l'equazione $3yy - 5ax = \frac{2xy - 4aa}{3}$, da cui averaſſi $x = \frac{9yy + 4aa}{2y + 15a}$, e queſto valore ſoſtituito in una delle due propoſte equazioni, per eſempio nella prima, ſarà

$$\frac{81y^4 + 72aayy + 16a^4}{4yy + 60ay + 225aa} + \frac{45ayy + 20a^3}{2y + 15a} = 3yy;$$

e finalmente riducendo al comune denominatore, ſarà $69y^4 - 90ay^3 + 72aayy + 40a^3y + 316a^4 = 0$, come ſopra.

Ma

Ma se le due equazioni non avessero il massimo termine dell'incognita, che si vuole eliminare, alla stessa potestà, si moltiplichi l'equazione di grado inferiore per tale potestà di essa incognita, onde sia dello stesso grado dell'altra, indi si proceda nel detto modo. Così se sia $y^3 = xyy + 3aax$, ed $yy = xx - xy - 3aa$, e debbasi togliere la y; si moltiplichi la seconda equazione in y, onde sia $y^3 = xxy - xyy - 3aay$, e però $xyy + 3aax = xxy - xyy - 3aay$. Da questa si cavi il valore di yy, cioè $yy = \frac{xxy - 3aay - 3aax}{2x}$, il quale paragonato col valore di yy dato dalla seconda equazione proposta $yy = xx - xy - 3aa$, darà $\frac{xxy - 3aay - 3aax}{2x} = xx - xy - 3aa$, cioè $3xxy - 3aay + 3aax = 2x^3$, e però $y = \frac{2x^3 - 3aax}{3xx - 3aa}$, e sostituito questo valore in una delle due proposte equazioni, come nella seconda, sarà $\frac{4x^6 - 12aax^4 + 9a^4xx}{9x^4 - 18aaxx + 9a^4} = xx - \frac{2x^4 + 3aaxx}{3xx - 3aa} - 3aa$; cioè riducendo allo stesso denominatore,
$x^6 + 18aax^4 - 45a^4xx + 27a^6 = 0$.

Ne' casi particolari possono esservi de' ripieghi, e delle più spedite maniere per ottenere l'intento, ma non cadono sotto regola alcuna. Si potrà vederne un'esempio nelle due equazioni $x + y + \frac{yy}{x} = 20b$, ed $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140bb$. Volendo eliminare la x; si trasporti il termine y

della prima dall'altra parte, onde sia $x + \frac{yy}{x} = 20b - y$, e quadrando ambi i membri, $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400bb - 40by + yy$, cioè $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400bb - 40by$; ma il primo membro di questa equazione è lo stesso del primo membro della seconda equazione proposta, sarà adunque $400bb - 40by = 140bb$, cioè $y = \frac{13b}{2}$.

83. Con calcolo bensì più laborioso, e lungo, ma nello stesso modo, se tre, quattro ec. sono le equazioni, ed altrettante le incognite, si riducono ad una sola, imperciocchè per mezzo di un' equazione si elimina un' incognita, il di cui valore dato per l'altre, e per le cognite si sostituisce in ciascuna delle equazioni rimanenti; indi per mezzo di un'altra equazione si elimina un' altra incognita, ed il di lei valore si sostituisce in quelle, che rimangono, e così di mano in mano sino al fine. Sieno le tre equazioni $x + y = c + z$; $z + x = a + y$; $z + y = b + x$, e si voglia un' equazione sola data per z. Dalla prima equazione si cavi il valore della y, cioè $y = c + z - x$, si sostituisca questo valore nell' altre due, e sono $z + x = a + c + z - x$, cioè $2x = a + c$ in luogo della seconda, e $z + c + z - x = b + x$, cioè $2z = b - c + 2x$ in luogo della terza; in quest' ultima si sostituisca in luogo della x il valore, che si cava dalla seconda trasformata, cioè $x = \frac{a + c}{2}$,

e si

e si avrà finalmente $2z = b - c + a + c$, cioè $z = \frac{a+b}{2}$.

In quest' altra maniera pure si può operare. Da ciascuna delle tre equazioni date si cavi il valore, per esempio della y, vale a dire $y = c + z - x$, $y = z + x - a$, $y = b + x - z$; Dal paragone di due a due di questi valori, a piacere, si formino due equazioni, che non averanno la y; da una di queste equazioni si cavi il valore dell'altra incognita x, che si sostituisca nell'altra equazione, vale a dire si facciano le due equazioni $c + z - x = z + x - a$, e $c + z - x = b + x - z$; dalla prima, se così piace, si cavi il valore della x, cioè $x = \frac{a+c}{2}$, che si sostituisca nella seconda, e viene l'equazione $c + z - \frac{a-c}{2} = b + \frac{a+c}{2} - z$, cioè $z = \frac{a+b}{2}$, come sopra, data per la sola incognita z. Nello stesso modo si operi quando le equazioni sono più composte, ed in maggior numero. Nella soluzione de' problemi si vedrà l'uso delle regole insegnate.

84. Qualunque volta le condizioni, o sia i dati del problema non ci somministrino tante equazioni, quante sono le incognite assunte, onde due per necessità rimangano, il problema sarà sempre indeterminato, nè potrassi mai trovare il valore di una delle incognite, se non supposto, e determinato il valore dell' altra, nel qual caso ogni problema indeterminato si fa determinato. Per formare, quantunque anticipatamente, qualche idea di que-

sti problemi indeterminati, cerco due numeri, la somma de' quali sia eguale a 30. Chiamo il primo numero x, se chiamerò il secondo $= 30 - x$, per la condizione del problema, non avrò poi il modo di arrivare all' equazione; adunque chiamo il secondo y, sarà per la condizione del problema $x + y = 30$. E poichè non è possibile il ritrovare materia d'altra equazione, con cui eliminare una delle due incognite, il problema è di natura sua indeterminato, ma se assegnerò un valore determinato ad una delle incognite, e supporrò, per esempio $y = 8$, sarà $x = 30 - y = 22$. Ma perchè si possono assegnare successivamente infiniti valori alla y, così infiniti sono i valori della x, ed in conseguenza d'infinite soluzioni è capace il problema. Ne prendo un' altro esempio dalla Geometria. Si debba ritrovare un rettangolo eguale ad un dato quadrato; si chiami y la base del rettangolo, l'altezza x, ed aa il dato quadrato; adunque sarà l'equazione $aa = xy$, e non avendo materia d'altra equazione, rimane il problema indeterminato, come di fatto infiniti sono i rettangoli al dato quadrato eguali, potendosi in infiniti modi variare la base, e relativamente l'altezza di quelli. Ma se si aggiungerà la condizione, che la base del rettangolo debba essere, per esempio, eguale ad $\frac{x}{2}$, sarà $y = \frac{x}{2}$, e l'equazione $\frac{xx}{2} = aa$, e così potendosi in infiniti modi variare una delle due incognite, in infiniti si varierà l'altra, ed infinite saranno le soluzioni del problema.

85. All' opposto : Se le condizioni del problema, che devonsi adempire, daranno più equazioni, che incognite, il problema sarà più che determinato, e per lo più impossibile; e se avrà ad esser possibile, converrà, che i valori delle date si ristringano a certa legge, la quale talvolta ci può far vedere innumerabili casi, ne' quali è possibile il problema. Nel sopra notato esempio di ritrovare due numeri, la somma de' quali sia eguale a 30, che quando nulla di più si esigga, è problema indeterminato; se si aggiunga la condizione, che in oltre la differenza de' quadrati di essi numeri sia data, per esempio, eguale a 60, il problema è determinato, avendo noi in questo caso due equazioni, cioè $x+y=30$, e $xx-yy=60$, e cavando dalla prima il valore della y, e sostituendone il quadrato nella seconda, sarà $x=\frac{960}{60}$, cioè $x=16$, ed in conseguenza $y=14$. Ma se di più si aggiungesse la terza condizione, che la somma de' quadrati di essi numeri sia eguale ad un dato numero, il problema è più che determinato, e però possibile nel solo caso, in cui il numero dato, a cui si vuole eguale la somma de' quadrati, sia appunto la somma di essi quadrati, cioè il 452. Così nell' altro esempio del rettangolo eguale al dato quadrato; se si vorrà, che il rettangolo sia sopra una data base, il problema sarà determinato, ma più che determinato se si pretenda in oltre, che i lati abbiano una data ragione tra loro, e possibile nel solo caso, che questa ragione sia ap-

pun-

punto quella, che nasce dall' altre condizioni della base data, e dell'eguaglianza al dato quadrato.

86. Risolute le equazioni, e ritrovati i valori dell' incognita ne' problemi geometrici, rimane che si costruiscano questi valori, cioè dalle date linee del problema si trovi quella, che appunto sia la incognita quantità, che si cercava. Sia in primo luogo il valore dell' incognita una frazione incomplessa razionale, come sarebbe $x = \frac{ab}{c}$, se si farà l'analogia $c, b :: a$, al quarto, sarà esso $\frac{ab}{c}$, adunque sulla indefinita AC (*Fig.* 13.) presa $AB = c$, ed alzata in qualunque angolo $BD = b$, e condotta per i punti A, D la indefinita AE, se si farà $AC = a$, e si condurrà CE parallela a BD, sarà $CE = \frac{ab}{c} = x$. O pure condotte in qualunque angolo EAC le indefinite AE, AC, se si prenda $AB = c$, $AD = b$, $AC = a$, e condotta dal punto B al punto D la retta BD, dal punto C si tiri CE parallela a BD, sarà $AE = \frac{ab}{c}$. Con questi adunque, o altri teoremi di geometria si trovi la quarta proporzionale delle tre quantità date, o la terza, se sono due, ed averassi in linea il valore dell' incognita. Se sia $x = \frac{abc}{mn}$, si instituisca una prima analogia, prendendo una qualunque lettera del denominatore, e due del numeratore, per esempio $m, b :: a$, al quarto, che è $\frac{ab}{m}$, si ritrovi la linea, che sia $= \frac{ab}{m}$, e si chia-

chiami f, adunque sarà $x = \frac{fc}{n}$; si instituisca la seconda analogia n, f : : c, al quarto, e sarà esso $\frac{fc}{n}$, cioè $\frac{abc}{mn}$. Adunque presa (*Fig.* 13.) $AB = m$, $AC = a$, $BD = b$, sarà $CE = \frac{ab}{m} = f$; indi prodotta indefinitamente CE, si prenda $CH = n$, $CK = c$, e condotta HE, si tiri dal punto K la retta KI parallela ad HE, sarà CH, CE : : CK, CI, cioè n, $\frac{ab}{m}$: : c, $\frac{abc}{mn} = CI = x$.

Se le dimensioni del numeratore, e denominatore saranno maggiori, in maggior numero cresceranno le analogie da instituirsi, ma sempre con lo stesso ordine.

87. Quindi se il valore dell'incognita sarà composto di più frazioni incomplesse, o di interi, e frazioni, ritrovate le linee, che a ciascun termine sono eguali, e sommate esse, o sottratte, secondo i segni, daranno la linea espressa dal valore dell' incognita.

88. Da questa regola si ricava il modo di trasformare un piano in un' altro di un dato lato, un solido in un'altro di uno, o di due lati dati ec. cioè un qualunque termine di due, tre ec. dimensioni in un' altro, il quale contenga una data lettera, se è di due dimensioni; una o due date, se è di tre dimensioni; ne contenga una, due, o tre date, se è di quattro ec.; imperciocchè sia il termine bb, che si voglia trasformare in un'altro, che contenga la let-

tera

tera a, per essa lettera a si divida il termine bb, sarà $\frac{bb}{a}$; con la data regola si trovi nella (*Fig.* 13.) una linea eguale a $\frac{bb}{a}$, e si chiami m; adunque sarà $\frac{bb}{a}=m$, e però $bb=am$. Sia ffc da trasformarsi in modo, che contenga ab; si trovi la linea eguale ad $\frac{ffc}{ab}$, che si chiami n, adunque sarà $\frac{ffc}{ab}=n$, e però $ffc=abn$; se si avesse voluto, che contenesse solamente la lettera a, si avrebbe fatto $\frac{fc}{a}=n$, e però $ffc=afn$. La cosa è chiara, nè occorre darne altri esempj.

89. Ciò posto; sia in secondo luogo il valore dell'incognita una frazione, o più frazioni complesse, cioè sia il denominatore di più termini, come $x=\frac{a^3}{bb+cc}$, si trasformi il termine, per esempio, cc in un' altro, che contenga la lettera b, e sia bm; adunque avrassì $\frac{a^3}{bb+bm}$, quindi si risolva in due analogie, cioè b, a :: a, al quarto $\frac{aa}{b}$; $b+m$, $\frac{aa}{b}$ :: a, al quarto $\frac{a^3}{bb+bm}$, e fatte al solito le costruzioni per mezzo de' triangoli simili, si avrà la linea, che è il valore dell'incognita. S'avrebbe potuto egualmente lasciare il termine cc nel denominatore, e trasformare bb in un'altro, che avesse contenuta la lettera c, per esempio cn; e sarebbe stata la frazione $\frac{a^3}{cc+cn}$,

che

che si risolve nelle due analogie $c, a :: a, \frac{aa}{c}$, e $c+n, \frac{aa}{c} :: a, \frac{a^3}{cc+cn}$. Sia $x = \frac{b^3c}{a^3+b^3}$; si trasformi nel denominatore il termine b^3 in aan, e sarà $\frac{b^3c}{a^3+aan}$, che si risolve in tre analogie $a, b :: b, \frac{bb}{a}$; $a, b :: \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{aa}$; $a+n, c :: \frac{b^3}{aa}, \frac{b^3c}{aan+a^3}$. Se il denominatore fosse di tre termini, se ne dovrebbero trasformare due; se di quattro, se ne trasformerebbero tre ec., così se fosse stato $x = \frac{b^3c}{a^3+b^3-bcc}$, si avrebbe fatto $b^3 = aan$, e $bcc = aap$, e però sarebbe $x = \frac{b^3c}{a^3+aan-aap}$, che istessamente si risolverà in tre analogie; cioè $a, b :: b, \frac{bb}{a}$; $a, b :: \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{aa}$; $a+n-p, c :: \frac{b^3}{aa}, \frac{b^3c}{a^3+aan-aap}$.

Non può fare difficoltà alcuna, che il numeratore della frazione sia complesso, cioè di più termini, poichè la frazione equivale ad altrettante, quanti sono i termini del numeratore, di modo che $\frac{aa \pm bb}{a^3-c^3}$ è lo stesso, che $\frac{aa}{a^3-c^3} \pm \frac{bb}{a^3-c^3}$, e però risolvendo nel modo spiegato ciascu-

na di queſte, la ſomma, o differenza (ſecondo i ſegni) delle linee da eſſe eſpreſſe ci darà la linea, che è il valore dell'incognita.

90. Ma ſenza moltiplicare le operazioni col ridurre la frazione di numeratore compleſſo a più frazioni, baſterà uſare opportunamente della trasformazione de' termini nel numeratore, e nel denominatore in quella guiſa, che ſi è veduto doverſi fare fin'ora nel denominatore; e però ſia $x = \frac{aa + bc}{a + b}$, ſi trasformi il termine bc nel termine am, e ſarà la frazione $\frac{aa + am}{a + b}$, quindi $a + b$, $a + m :: a$, $\frac{aa + am}{a + b}$. Sia $\frac{aacc - abcf}{acf + bff}$, ſi faccia $bf = am$, e la frazione ſarà $\frac{aacc - aacm}{acf + amf}$, cioè $\frac{acc - acm}{cf + mf}$, e però $f, a :: c, \frac{ac}{f}$, e $c + m, c - m :: \frac{ac}{f}, \frac{acc - acm}{fc + mf}$.

Se però il numeratore, e denominatore della frazione ſono tali, che ſenza trasformare termine alcuno ſi poſſano riſolvere ne' ſuoi componenti lineari, non ſi dovrà far uſo della trasformazione, che in queſti caſi moltiplicherebbe le operazioni inutilmente. Tali ſarebbero le frazioni $\frac{aab}{aa - cc}$, $\frac{a^3 - abb}{ac + cc}$, e ſimili; la prima delle quali ſenz'altro ſi riſolve nelle due analogie $a + c, a :: a, \frac{aa}{a + c}$, ed $a - c, b :: \frac{aa}{a + c}, \frac{aab}{aa - cc}$; la ſeconda nelle due $c, a :: a + b$,

aa

$\frac{aa+ab}{c}$, ed $a+c$, $a-b$ :: $\frac{aa+ab}{c}$, $\frac{a^3-abb}{ac+cc}$. Anzi molte volte, ſenza traſformare i termini, tornerà aſſai più comodo ſervirſi dell'eſtrazione delle radici per riſolvere nelle analogie la frazione; così la frazione $\frac{aa+bc}{a}$ ſi riſolve nella analogia a, $\sqrt{aa+bc}$ :: $\sqrt{aa+bc}$, $\frac{aa+bc}{a}$; la frazione $\frac{a^3+abb}{aa+cc}$ ſi riſolve nelle due analogie $\sqrt{aa+cc}$, $\sqrt{aa+bb}$ :: $\sqrt{aa+bb}$, $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa+cc}}$, e $\sqrt{aa+cc}$, a :: $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa+cc}}$, $\frac{a^3+abb}{aa+cc}$. Talora però è neceſſario traſformare ancora qualche termine, come nella frazione $\frac{a^3+bbc}{aa-cc}$, la quale non potrà riſolverſi nè meno coi radicali, ſe non traſformando uno dei termini del numeratore, per eſempio, bbc in acm, onde ſia $\frac{a^3+acm}{aa-cc}$, e però $a+c$, a :: $\sqrt{aa+cm}$, $\frac{a\sqrt{aa+cm}}{a+c}$, ed $a-c$, $\sqrt{aa+cm}$ :: $\frac{a\sqrt{aa+cm}}{a+c}$, $\frac{a^3+acm}{aa-cc}$. Si dica lo ſteſſo di frazioni più compoſte.

Tra le diverſe aſſegnate maniere, quale poi debba eleggerſi ne' caſi particolari, non ſi può definire; ſi dovrà forſe provarne più d'una, ed appigliarſi a quella, che ci forniſca una più ſemplice coſtruzione del propoſto problema.

91. Per ciò che riguarda poi il ritrovare quelle linee,

che vengono espresse dai radicali; sia in terzo luogo il valore dell'incognita un intiero radicale quadratico, per esempio $x = \sqrt{ab}$, cioè medio proporzionale fra la a, e la b; presa (*Fig.* 14.) $AB = a$, ed in diretto $BC = b$, e divisa per metà in H la composta AC, si descriva col raggio HC il semicircolo ADC, e dal punto B si alzi la perpendicolare BD terminata alla periferia, sarà il rettangolo di AB in BC eguale al quadrato di BD; cioè $ab = \overline{BD}^2$, e però $\sqrt{ab} = BD = x$. Sia $x = \sqrt{2aa}$, presa $AB = 2a$, $BC = a$, sarà $BD = \sqrt{2aa}$ ec.

E se la radicale fosse di quantità complessa, come $x = \sqrt{4aa \pm ab}$, o pure $x = \sqrt{3aa \pm ab \pm 2ac}$; fatta AB nel primo caso eguale a $4a \pm b$, cioè alla somma di $4a$, e di b, se il segno è positivo, ed alla differenza se è negativo; e nel secondo caso fatta $AB = 3a \pm b \pm 2c$, e presa $BC = a$, si descriva il semicircolo ADC al diametro AC, ed alzata la perpendicolare BD, sarà essa perpendicolare nel primo caso eguale alla $\sqrt{4aa \pm ab} = x$, e nel secondo $= \sqrt{3aa \pm ab \pm 2ac} = x$.

Generalmente sieno quanti si vogliono i termini sotto il vincolo, ed in qualunque modo combinati coi segni, si costruirà sempre il valore per mezzo del semicircolo, quando ciascun termine sia moltiplicato nella stessa lettera, facendo l'uno de' segmenti, per esempio, CB eguale a questa lettera, e l'altro segmento BA eguale alla somma, o differenza di tutti i termini per essa lettera divisi, ed alzan-

zando la perpendicolare BD. E' facile il vedere, che ſe la combinazione de' ſegni rendeſſe quantità negativa il ſegmento BA, ſarebbe negativa la quantità ſotto il vincolo, e però immaginario il valore dell'incognita; tale ſarebbe $x = \sqrt{ab - ac}$, ſuppoſta c maggiore di b.

92. Che ſe ciaſcun termine non ſarà per la ſteſſa lettera moltiplicato, tali ſi poſſono eſſi rendere trasformando quelli, che non lo ſono; e però ſe ſia $x = \sqrt{aa \pm bb}$, facciaſi $bb = am$, e ſarà $x = \sqrt{aa \pm am}$, e preſa $AB = a \pm m$, cioè $= a \pm \frac{bb}{a}$, e $BC = a$, e deſcritto il ſemicircolo, ſarà $BD = \sqrt{aa \pm bb} = x$. Iſteſſamente, data $x = \sqrt{aa + bb - cc}$, ſi faccia $bb = am$, e $cc = an$, e ſarà $x = \sqrt{aa + am - an}$, e preſa $AB = a + m - n$, e $BC = a$, ſarà $BD = \sqrt{aa + bb - cc} = x$.

93. Ma comunque ſieno i termini, ſenza fare mutazione alcuna, ſi coſtruiranno ſempre i radicali quadratici, o col ſolo triangolo rettangolo, o con eſſo, e col circolo aſſieme. Sia $x = \sqrt{aa + bb}$, ſi prenda (*Fig.* 15.) $AB = a$, $BC = b$ perpendicolare ad AB, ſarà $AC = \sqrt{aa + bb} = x$. Sia $x = \sqrt{2aa}$, fatta $AB = a$, e $BC = a$, ſarà $AC = \sqrt{2aa}$; ſia $x = \sqrt{3aa}$, fatte come prima le AB, BC eguali ad a, ed alzata ſulla retta AC la normale $CD = a$, ſarà $AD = \sqrt{3aa}$. Sia $x = \sqrt{5aa}$, fatta $AB = 2a$, $BC = a$, ſarà $AC = \sqrt{5aa}$. Sia $x = \sqrt{aa + bb + cc}$, fatta $AB = a$, $BC = b$, e normale ad AB, ſulla AC ſi alzi la perpendicolare $CD = c$,

e

e sarà l'ipotenusa $AD = \sqrt{aa + bb + cc} = x$, istessamente si proceda se la quantità fosse più composta. Sia $x = \sqrt{aa + bc}$; quando non si trasformi il termine bc nel modo detto di sopra, presa (*Fig.* 16.) $AB = a$, $BC = b$, $BD = c$, sul diametro CD si descriva il semicircolo CED, la ordinata BE sarà $= \sqrt{bc}$, e tirando la ipotenusa AE, sarà essa eguale alla $\sqrt{aa + bc} = x$. Sia $x = \sqrt{aa + bc + ee}$, sulla AE si tiri la normale $EM = e$, e sarà $AM = \sqrt{aa + bc + ee} = x$. Sia $x = \sqrt{aa + bc + cc}$, presa $BC = b + c$, $BD = c$, sarà $BE = \sqrt{bc + cc}$, ed $AE = \sqrt{aa + bc + cc}$. Se più saranno i termini, cresceranno le operazioni, ma non le difficoltà. Sia $x = \sqrt{aa - bb}$; al diametro $AB = a$ (*Fig.* 17.) si descriva il semicircolo ACB, a cui si inscriva la corda $AC = b$, sarà, per l'angolo retto ACB, $BC = \sqrt{aa - bb}$. Sia $x = \sqrt{aa - bb + hh}$, si produca AC in M in modo, che sia $CM = h$, e condotta BM, sarà essa $= \sqrt{aa - bb + hh} = x$. Sia $x = \sqrt{aa - bb - hh}$, nel semicircolo ACB si inscriva la corda $AC = \sqrt{bb + hh}$, sarà $BC = \sqrt{aa - bb - hh}$. Sia $x = \sqrt{aa - bc}$, o pure $x = \sqrt{aa - bc - ce}$; presa (*Fig.* 18.) $AB = b$ nel primo caso, ed $= b + e$ nel secondo, e AD in diretto $= c$, $AH = a$, si descrivano coi diametri BD, AH i due semicircoli BCD, AEH, la ordinata AC sarà $= \sqrt{bc}$ nel primo caso, ed $= \sqrt{bc + ce}$ nel secondo, e però

presa

presa $AE = AC$, e condotta la corda EH, sarà essa $= \sqrt{aa - bc}$ nel primo caso, ed $= \sqrt{aa - bc - ce}$ nel secondo. Che se fosse $x = \sqrt{aa - bc - ee}$, fatta $AB = b$, $AD = c$, e presa in oltre $CF = e$ normale ad AC, sarà $AF = \sqrt{bc + ee}$, quindi fatta $AI = AF$, sarà $IH = \sqrt{aa - bc - ee}$.

Sia $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$, cioè $x = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}}$, si trasformi il secondo termine b^4 in $aamm$, e sarà $x = \sqrt{\sqrt{a^4 + aamm}}$, e levando dal secondo radicale il quadrato aa, sarà $x = \sqrt{a\sqrt{aa + mm}}$; si faccia (*Fig.* 19.) $AB = a$, BC normale eguale ad m, sarà $AC = \sqrt{aa + mm}$. Prodotta CA in H di modo, che sia $AH = AB = a$, sul diametro HC si descriva il semicircolo HDC, e condotta dal punto A la perpendicolare AD al diametro, sarà essa $AD = \sqrt{a\sqrt{aa + mm}} = x$.

I casi più composti si ridurranno senza fatica alli già spiegati. Nulla aggiungo intorno alle frazioni composte di quantità razionali, e di radicali, poichè niente altro esiggono, se non la combinazione delle date regole per quelle, e per queste.

94. Per la costruzione delle equazioni di quadratica affetta, che sono le più alte, che da me si trattino in questo Capo, ô supposta necessaria la risoluzione loro, ed ô assegnate le regole, affinchè si abbiano i valori dell'incognita da costruirsi nelle maniere poco fa insegnate. Non è però necessaria questa previa risoluzione, e senza di essa si possono costruire nel seguente modo.

Tutte le infinite equazioni di quadratica affetta vengono espresse dalla formola $xx \pm ax \pm bb = 0$, cioè dalle quattro, che nascono dalle quattro diverse combinazioni de' segni,

1. $xx + ax - bb = 0$
2. $xx - ax - bb = 0$
3. $xx + ax + bb = 0$
4. $xx - ax + bb = 0$

intendendo che la lettera a esprima tutte le quantità, che formano il coefficiente del secondo termine, e b la radice quadrata del complesso di tutti i termini cogniti. Adunque per costruire le due, prima, e seconda: si prenda (*Fig.* 20.) $CA = \frac{1}{2}a$, AB in angolo retto, ed eguale a b, col raggio CA si descriva il circolo AED, e dal punto B si tiri la retta BD terminata alla periferìa in D, la quale passi per lo centro C; sarà BE il valore positivo dell'incognita, cioè la radice vera, o sia positiva dell'equazione $xx + ax - bb = 0$, e BD sarà la falsa o negativa; siccome all'opposto sarà BD la vera, e BE la falsa dell'equazione $xx - ax - bb = 0$. Ed in fatti risolvendo le due equazioni, sono esse $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, ed $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e per la costruzione essendo $CA = CE = CD = \frac{a}{2}$, $AB = b$, sarà $CB = \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e però $BE = \sqrt{\frac{aa}{4} + bb} - \frac{a}{2}$, valore positivo della incognita nella prima equazione, e

BD

BD presa negativa $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, valore negativo.

Così sarà BD presa positiva $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, valore positivo dell'incognita nella seconda equazione, e per essere CB maggiore di CE, sarà EB negativa $= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, valore negativo.

La terza, e quarta formola si costruirà così. Presa (*Fig.* 21.) $CA = \frac{1}{2}a$, ed AB in angolo retto $= b$, come nelle costruzioni superiori, e descritto col raggio CA il semicircolo ADH, si conduca BD parallela ad AC, le due rette BE, BD saranno i due valori, cioè le due radici negative dell'equazione $xx + ax + bb = 0$, e le due positive dell'equazione $xx - ax + bb = 0$. Imperciocchè, risolvendo le equazioni, ci darà la terza $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e la quarta $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$; ora condotte le rette CD, CE, e CI perpendicolare a BD, sarà $ID = IE = \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e però BE negativa $= -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, valore negativo dell'incognita nella terza equazione, per esser BI maggiore di IE; e sarà BD presa negativa $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, altro valore negativo della stessa terza equazione. All'opposto sarà BD positiva

ſitiva $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e BE poſitiva $= \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, ambi i valori poſitivi dell' incognita nella quarta equazione.

Adunque per coſtruire una qualunque equazione di quadratica affetta, baſterà aſſumere il raggio CA eguale alla metà del coefficiente del ſecondo termine, e la tangente AB eguale alla radice quadrata dell' ultimo termine, ed il rimanente, come nell' una, o nell' altra delle due figure, ſecondo che ſarà poſitivo, o negativo l'ultimo termine; quindi per coſtruire, per eſempio, l' equazione $xx + ax - bx - aa + cc = 0$, ſi faccia $AC = \frac{a-b}{2}$, ed $AB = \sqrt{aa - cc}$ nella prima delle due figure, ſe a è maggiore di c; ed $AB = \sqrt{cc - aa}$ nella ſeconda, ſe a è minore di c. Da queſto eſempio ſi vede, come debbaſi operare in tutti gl' altri.

Può darſi il caſo, che nella coſtruzione della *Fig.* 21. la retta BD non tagli, ma tocchi il circolo ADH; o che nè lo tagli, nè lo tocchi; lo toccherà quando ſia $AC = AB$, cioè $\frac{1}{2}a = b$, ed i due valori dell' incognita dell' equazione BE, BD ſaranno eguali, l' uno poſitivo, e l' altro negativo; non lo toccherà, nè lo taglierà quando ſia BA maggiore di AC, cioè b maggiore di $\frac{1}{2}a$, e l' incognita non avrà valori, cioè ſaranno immaginarj; e ciò confronta pure colla riſoluzione analitica, imperciocchè quando

do sia $\frac{1}{2}a = b$, sarà $\frac{aa}{4} - bb = 0$, e però i due valori $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$ saranno $x = -\frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$, e quando sia $\frac{a}{2}$ minore di b, sarà $\sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$ quantità immaginaria, e però immaginarj i due valori dell'incognita.

95. In queste costruzioni è stato necessario ritrovare la radice quadrata dell'ultimo termine dell'equazione, la quale ci fornisce la tangente AB del circolo. Se però esso ultimo termine sia, o voglia rendersi (il chè è in nostra mano) eguale ad un rettangolo, potranno costruirsi anche in quest'altra maniera le quattro formole:

1. $xx + ax - bc = 0$
2. $xx - ax - bc = 0$
3. $xx + ax + bc = 0$
4. $xx - ax + bc = 0$

Si descriva il circolo BAD (*Fig.* 22.) di un qualunque diametro, purchè esso non sia minore nè di a, nè di $b - c$, (suppongo b maggiore di c, cioè per b intendo il lato maggiore, e per c il lato minore del rettangolo dato) da un qualunque punto A nella periferia si inscrivano nel circolo le due corde $AB = a$, $AD = b - c$, e si produca questa in F, onde sia $DF = c$; col centro C del primo circolo, e col raggio CF si descriva il secondo FGH, che taglierà in F, E, G, H le corde AD, AB prolungate; ciò

ciò fatto, sarà AG la radice vera, o sia positiva, cioè il valore positivo, ed AH il negativo per l'equazione $xx + ax - bc = 0$; ed all'opposto AG sarà il negativo, ed AH il positivo per l'equazione $xx - ax - bc = 0$.

Per vedere questa verità bisogna supporre due proprietà del circolo, che da' Geometri si dimostrano, cioè che le rette EA, DF sono eguali tra loro, siccome tra loro le due GA, BH, e che sono eguali i rettangoli $EA \times AF$, e $GA \times AH$. Supposti questi due Teoremi, si divida BA per metà in M, per la sesta del secondo d'Euclide, sarà il quadrato di MG eguale al quadrato di MA con il rettangolo di $BG \times GA$, cioè di $HA \times AG$, cioè di $FA \times AE$; ma il quadrato di MA, per la costruzione, è $= \frac{aa}{4}$, ed il rettangolo di $FA \times AE$ è $= bc$, adunque sarà $MG = \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, e però $AG = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, valore positivo, ma $AH = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, quindi AH negativa $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, altro valore che è negativo; l'uno e l'altro appunto, come nascono dalla risoluzione della prima equazione. Per la stessa ragione AG negativa sarà $= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, ed AH positiva $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, che sono i valori della incognita nella seconda equazione.

Ris-

Rifpetto alla terza, e quarta equazione; defcritto un circolo qualunque RAD, (*Fig.* 23.) col diametro non minore di a, nè di $b+c$, s'infcrivano in effo due corde da un qualunque punto A della periferia, cioè $AR=a$, $AD=b+c$, e fatta $DF=c$, col centro C del primo circolo, e col raggio CF fi defcriva l'altro circolo GHF, che taglierà le due corde AR, AD nei punti G, H, F, E; ciò fatto, faranno AG, AH i due valori negativi della terza equazione, ed i due pofitivi della quarta; imperciocchè divifa RA per metà in M, farà, per la fefta del fecondo libro d'Euclide, MA quadrato eguale al rettangolo di $HA \times AG$, cioè di $RG \times GA$, cioè di $DE \times EA$, con di più il quadrato di MG; adunque farà $\frac{aa}{4} = bc + \overline{MG}^2$, cioè $MG = \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, e però $-MA + MG$, cioè GA negativa farà $= -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, e $-MG - MR$, cioè GR negativa farà $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, ambi valori negativi dell' incognita nella terza equazione. Similmente $MG + MR$, cioè $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$ farà GR pofitiva, ed $MA - MG$, cioè $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$ farà AG pofitiva, ambi valori pofitivi dell' incognita nella quarta equazione.

E' chiaro, e per la coftruzione della Figura vigefima

terza,

terza, e per la risoluzione della terza, e quarta equazione, che quando sia $bc = \frac{aa}{4}$, il circolo $HGEF$ toccherà la retta RA, e saranno eguali i due valori; e se bc sarà maggiore di $\frac{aa}{4}$, nè la toccherà, nè la taglierà, e saranno i due valori immaginarj.

Vedute quanto può bastare le regole principali, passerò a farne uso nella soluzione de' Problemi, e però sia

PROBLEMA I.

96. *Sia una certa somma di soldi da distribuirsi a certi poveri, ed il numero de' soldi sia tale, che per darne tre a ciascun povero ne manchino otto, e dandone due, ne avvanzino tre; si cerca il numero de' poveri, e de' soldi.*

Si chiami il numero de' poveri $= x$, adunque poichè il numero de' soldi è tale, che per darne tre a ciascheduno ne mancano otto, sarà il numero de' soldi $3x - 8$; ma dandone due, ne avvanzano tre, sarà adunque pure $= 2x + 3$, e però sarà l'equazione $3x - 8 = 2x + 3$, cioè $x = 11$. Pertanto undeci saranno i poveri, e perchè $3x - 8$, o pure $2x + 3$ è il numero de' soldi, sostituito l'undeci in luogo della x, sarà esso numero de' soldi $= 25$.

PRO-

PROBLEMA II.

97. *Date le velocità di due mobili, la diſtanza loro, e la differenza del tempo, in cui principiano a moverſi ſopra una retta linea, ſi dimanda il punto nella linea, ed il tempo, in cui ſi raggiungeranno.*

Sia (*Fig.* 24.) in A il primo mobile, la di cui velocità ſia tale, che deſcriva uno ſpazio c nel tempo f; ſia B il ſecondo mobile con una velocità tale, per cui deſcriva lo ſpazio d nel tempo g, la differenza del tempo, in cui principiano a moverſi ſia h, e la diſtanza AB ſia e. Si muovano eſſi in primo luogo verſo la ſteſſa parte, e ſi raggiungano in D, chiamata adunque $AD = x$, ſarà $BD = x - e$. Per avere l'equazione ſi conſideri, che eſſendo data la differenza del tempo dal principio del moto del mobile A, e del mobile B, ſe ritroveraſſi il tempo, che impiega il mobile A, ed il tempo, che impiega il mobile B, e che al tempo minore, cioè a quello del mobile, che per ſecondo ſi muove, ſi aggiunga la data differenza, dovranno indi queſti tempi eſſer eguali; e però con la regola delle proporzioni ſi dica: ſe il mobile A fa lo ſpazio c nel tempo f, in che tempo dovrà deſcrivere lo ſpazio x? cioè $c, f :: x$, al quarto, e ſarà eſſo $= \frac{fx}{c}$; ſimilmente: ſe il mobile B deſcrive lo ſpazio d nel tempo g, lo ſpazio $x - e$ in che tempo lo deſcriverà? cioè $d, g ::$

x

$x - e$, al quarto $\frac{gx - ge}{d}$, è adunque il tempo del mobile $A = \frac{fx}{c}$, ed il tempo del mobile $B = \frac{gx - ge}{d}$, e la loro differenza h, e però se il mobile A principia a muoversi dopo il mobile B, sarà $\frac{fx}{c} + h = \frac{gx - ge}{d}$, e riducendo al comun denominatore, $fdx + chd = cgx - cge$, cioè $cgx - fdx = chd + ceg$, e dividendo per $cg - fd$, $x = \frac{chd + ceg}{cg - fd}$. Se il mobile A si muova prima del mobile B, sarà $\frac{fx}{c} = h + \frac{gx - ge}{d}$, e riducendo al comune denominatore, $fdx = cdh + cgx - ceg$, cioè $cgx - fdx = ceg - cdh$, e dividendo per $cg - fd$, $x = \frac{ceg - cdh}{cg - fd}$. Sostituendo nell'espressione del tempo totale, $\frac{fx}{c} + h$ nel primo caso, ed $\frac{fx}{c}$ nel secondo, in luogo della x il rispettivo valore ritrovato, averassi esso tempo, che si cerca.

Applicherò le formole a qualche esempio. Abbia il mobile A la velocità di fare 9 miglia in un' ora, il mobile B di farne 15 in due ore, e sieno lontani l'uno dall'altro 18 miglia, e B cominci a muoversi un' ora prima di A; sarà adunque $h = 1$, $f = 1$, $c = 9$, $g = 2$, $d = 15$, $e = 18$, e però $x = \frac{324 + 135}{18 - 15} = 153$. Sostituito questo valore in luogo di x, e gli altri nell'espressione $\frac{fx}{c} + h$ del tempo,

sarà

sarà esso $= 18$. Adunque si raggiungeranno i due mobili in distanza dal punto A di 153 miglia, dopo 18 ore dal principio del moto.

Abbia il mobile A la velocità di fare quattro miglia in un'ora, il mobile B di farne cinque pure in un'ora, e sieno lontani uno dall' altro 6 miglia, ed A cominci a muoversi due ore prima di B, sarà dunque $h=2$, $f=1$, $c=4$, $g=1$, $d=5$, $e=6$. Presa la formola del secondo caso, sarà $x=\frac{24-40}{4-5}$, cioè $x=16$; e sostituito questo valore della x cogli altri nella espressione del tempo $\frac{fx}{c}$, sarà esso $=4$. Adunque si raggiungeranno i due mobili A, B in distanza dal punto A di sedici miglia dopo quattro ore dal principio del moto.

Ma se i due mobili si vengano incontro; si uniscano, per esempio, nel punto M; adunque chiamata $AM=x$, e ritenute le denominazioni, come sopra, si varierà la sola BM, che sarà $=e-x$, ed in conseguenza il tempo del mobile B per correre lo spazio BM, che sarà $\frac{ge-gx}{d}$. Quindi se A principia il moto dopo del mobile B, sarà $\frac{fx}{c}+h=\frac{ge-gx}{d}$, e se comincia il moto prima, sarà $\frac{fx}{c}=h+\frac{ge-gx}{d}$, le quali equazioni sono, la prima $fdx+cdh=cge-cgx$, cioè $x=\frac{cge-cdh}{cg+fd}$, la seconda $fdx=cdh+cge-cgx$, cioè $x=\frac{cge+cdh}{fd+cg}$.

Abbia il mobile A la velocità capace di fare sette miglia in due ore, il mobile B di farne otto in tre ore, e sieno lontani l'uno dall'altro cinquanta nove miglia, ed A si muova un' ora prima di B, sarà adunque $h = 1$, $f = 2$, $c = 7$, $g = 3$, $d = 8$, $e = 59$, e però presa la seconda formola $x = \frac{cge + cdh}{cg + fd}$, e sostituiti i valori, sarà $x = \frac{1239 + 56}{21 + 10}$, cioè $x = 35$. S'incontreranno adunque i due mobili in distanza dal punto A di 35 miglia dopo dieci ore dal principio del moto, come si vedrà sostituendo nell'espressione del tempo totale, $\frac{fx}{c}$, il valore ritrovato della x, ed i valori di f, e di c.

PROBLEMA III.

98. *Data la massa della Corona del Re Jerone mista d'oro, e d'argento, e data la gravità specifica dell'oro, dell'argento, e della Corona, si dimanda la quantità dell'uno, e dell'altro metallo.*

Sia la massa della corona $= m$, la gravità specifica dell'oro a quella dell'argento, come 19 a $10 \frac{1}{3}$; ed alla specifica della corona, come 19 a 17. Si chiami x la quantità dell'oro, ch'è nella corona, e però $m - x$ sarà quella dell'argento. La massa divisa per la densità, o gravità specifica s'eguaglia al volume di un Corpo, dunque il volume della corona sarà $\frac{m}{17}$, quello dell'oro $\frac{x}{19}$, quello

dell'

dell'argento $\frac{m-x}{10\frac{1}{3}}$; ma il volume della corona è eguale ai due volumi dell'oro, e dell'argento, che la compongono; dunque si avrà l'equazione $\frac{m}{17}=\frac{x}{19}+\frac{m-x}{10\frac{1}{3}}$, cioè, ordinandola, $\frac{19-10\frac{1}{3}}{19\times 10\frac{1}{3}}\times x=\frac{17-10\frac{1}{3}}{17\times 10\frac{1}{3}}\times m$, e però $x=\frac{6\frac{2}{3}\times 19m}{8\frac{2}{3}\times 17}$, o sia $x=\frac{190m}{221}$. Quindi posta, per esempio, la massa della corona di cinque libbre, sarà la quantità dell'oro libbre $4\,e\,\frac{66}{221}$, quella dell'argento libbre $\frac{115}{221}$.

PROBLEMA IV.

99. Se due pesi sieno tali, che levando dal primo una libbra, il resto sia eguale al secondo accresciuto di questa libbra; ed aggiunta una libbra al primo, e tolta dal secondo, sia la somma doppia del secondo diminuito di questa libbra, si ricercano i pesi.

Si chiami il primo peso $=x$, il secondo $=y$, sarà adunque $x-1=y+1$, per la prima condizione, e $\frac{x+1}{2}=y-1$, per la seconda. Dalla prima si ricavi il valore $y=x-2$, il quale sostituito nella seconda darà

rà $\frac{x+1}{2}=x-3$, e però $x+1=2x-6$, cioè $x=7$, ed in conseguenza $y=5$.

PROBLEMA V.

100. *Nel dato circolo DCM (Fig. 25.) data la intercetta AB fra il centro, e la MB condotta dall' estremità del diametro DM perpendicolare ad AC, si cerca nella tangente MO il punto O, onde sia il rettangolo di OM in MB eguale al rettangolo di DM in AB.*

Si chiami $AB=b$, $AM=a$, $MO=x$, sarà $MB=\sqrt{aa-bb}$, e per la condizione del problema, $x\sqrt{aa-bb}=2ab$, cioè $x=\frac{2ab}{\sqrt{aa-bb}}$.

Dal punto D si tiri DO parallela a BM, saranno simili i triangoli MBA, DMO, e però $MB, BA :: DM, MO$; cioè $\sqrt{aa-bb}, b :: 2a, MO=\frac{2ab}{\sqrt{aa-bb}}=x$.

PROBLEMA VI.

101. *Dato un rettangolo, (Fig. 26.) si cerca un parallelo-grammo, i di cui lati sieno moltipli in data ragione dei lati del dato rettangolo, e l'area submultipla.*

Sia $ABCD$ il dato rettangolo, $AB=a$, $BC=b$, e però l'area $=ab$. Il parallelo-grammo, che si cerca, sia $BFHG$, il di cui lato BF debba essere ad AB, come

me n ad e, e però $BF = \frac{an}{e}$; il lato BG debba essere a BC, come m ad e, e però $BG = \frac{bm}{e}$; e finalmente l'area $BFHG$ debba essere al dato rettangolo ab, come e ad r. Chiamisi $BL = x$, e però condotta FL normale a BG, sarà $FL = \sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, adunque il parallelo-grammo $BFHG$, cioè $FL \times BG$ sarà $= \frac{bm}{e}\sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, il quale, poichè deve essere al rettangolo $ABCD$, come e ad r, ci darà l'analogìa $\frac{bm}{e}\sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, $ab :: e, r$; e l'equazione $\frac{bmr}{ee}\sqrt{\frac{aann}{ee} - xx} = ab$. Liberando dal radicale, sarà $\frac{aann}{ee} - xx = \frac{aae^4}{mmrr}$, cioè $xx = \frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}$, e cavando la radice, $x = \pm\sqrt{\frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}}$.

Nel lato BA si prenda $BI = \frac{aee}{mr}$, ed $IM = \frac{an}{e}$, e col centro I, e raggio IM si descriva il semicircolo MLP; sarà l'ordinata $BL = \sqrt{\frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}} = x$, e dal punto L alzando la perpendicolare $LF = BI$, e condotta BF, si prenda $BG = \frac{bm}{e}$, e compito il parallelo-grammo $BHFG$, sarà esso $= BG \times FL = \frac{abe}{r}$, cioè al rettangolo $BADC = ab$, co-

me

me e ad r; ed il lato BF sarà $= \sqrt{\overline{BL}^2 + \overline{LF}^2} = \frac{an}{e}$, le quali cose appunto si dovevano fare.

L'estrazione della radice â portata l'ambiguità de' segni, e però due valori dell'incognita, ed in conseguenza due soluzioni del problema; ma è facile il vedere, che questi due valori sono gli stessi, nè richiedesi altro per il valore negativo, se non che si faccia la stessa costruzione dalla parte di B verso C.

PROBLEMA VII.

102. *Inscrivere un Cubo in una data Sfera.*

Sia $KQEP$ (*Fig.* 27.) il circolo massimo della sfera, A il centro, AT il raggio $= a$, AR la metà dell'altezza, o sia del lato del cubo inscritto, e però facciasi $AR = x$. Per lo punto R s'intenda passare un piano normale ad AT, la di cui comune sezione colla sfera sarà il circolo $QNSKFO$, ed il quadrato in questo circolo inscritto sarà una faccia, o sia un piano del parallelepipedo inscritto alla sfera; ma perchè il parallelepipedo deve essere un cubo, converrà adunque, che sia $GR = SN = NO$, o sia $AR = RI = IO$, e che in oltre i piani, da' quali è chiuso, sieno tra loro in angolo retto. Nel circolo $KPEQ$ sarà l'ordinata $KR = RQ = \sqrt{aa - xx}$, e presa $RI = RA = x$, sarà $KI = \sqrt{aa - xx} + x$, ed $IQ = \sqrt{aa - xx} - x$, e nel circolo $NKOQ$ l'ordinata $IO = \sqrt{KI \times IQ} = \sqrt{aa - 2xx}$; adunque sarà l'equazione $\sqrt{aa - 2xx} = x$, e però $aa = 3xx$, ed $x = \pm\sqrt{\frac{aa}{3}}$. Presa AV eguale alla terza parte del raggio AB, sul diame-

metro CV si descriva il semicircolo CRV; il punto R, in cui egli taglia il raggio AT, sarà il punto ricercato, e sarà $AR = \sqrt{\frac{aa}{3}}$ metà del lato del cubo, dalla parte di T preso il valore positivo, e dalla parte di Z preso il negativo; quindi presa $AG = AR$, e per i punti R, G tagliata la sfera con due piani normali ad RG, e presa $RH = RI = RA$, e per i punti I, H tagliata la sfera con due altri piani normali ad HI, e con altri due per SN, FO normali ad NO, sarà inscritto il cubo. Imperciocchè per la costruzione, come è chiaro, i piani sono tra loro normali, ed essendo $AR = RI = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, sarà, per la proprietà del circolo $KQEP$, l'ordinata $RQ = \sqrt{\frac{2aa}{3}}$, e però $IQ = \sqrt{\frac{2aa}{3}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, ed $IO = \sqrt{KI \times IQ} = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, ed in conseguenza tutti i lati eguali; il che ec.

Dalla costruzione di questo problema ne nasce una assai semplice dimostrazione sintetica. Poichè AV è la terza parte del raggio AC, sarà il rettangolo CAV, cioè il quadrato di AR, la terza parte del quadrato del raggio, e perchè $AR = RI$, se dal centro A della sfera si tirerà una retta AI al punto I, sarà il quadrato di AI doppio del quadrato di AR, cioè due terze parti del quadrato del raggio, e se dallo stesso centro A intenderassi condotto un raggio AO, sarà il quadrato IO eguale al quadrato AO meno il quadrato AI, cioè eguale al quadrato del raggio

meno

meno due terze parti di esso quadrato, e però eguale ad una terza parte del quadrato del raggio, ed in conseguenza IO eguale ad AR ec.

PROBLEMA VIII.

103. *Dati i due circoli concentrici ACO, BDH, (Fig. 28.) condurre dal punto O una corda tale, che sia $OM = DC$.*

Sia OC la corda cercata, e sia F il centro, $FH = a$, $FO = b$, ed abbassata la perpendicolare ME ad AO, sia $FE = x$, adunque $EM = \sqrt{aa - xx}$, $EO = b - x$, e però $OM = \sqrt{aa - 2bx + bb}$. Dal punto C si conduca CA all' estremità del raggio FA; saranno simili i due triangoli OEM, OCA, e sarà OM, $OE :: OA$, OC, cioè $\sqrt{aa - 2bx + bb}$, $b - x :: 2b$, $OC = \frac{2bb - 2bx}{\sqrt{aa - 2bx + bb}}$, ma per la trentesima sesta del terzo d'Euclide è $DO \times OM = BO \times OH$, e però DO, $BO :: OH$, OM, cioè $DO = \frac{\overline{a + b} \times \overline{b - a}}{\sqrt{aa - 2bx + bb}}$, ed in conseguenza $CD = CO - DO = \frac{bb - 2bx + aa}{\sqrt{aa - 2bx + bb}} = \sqrt{bb - 2bx + aa}$, ma per la condizione del problema deve essere $OM = CD$, dunque sarà $\sqrt{bb - 2bx + aa} = \sqrt{bb - 2bx + aa}$, equazione identica, onde si ricava, che dovunque si tiri dal punto O la corda OC, sarà sempre $OM = CD$; il che si conosce

vero

vero anche conducendo dal centro F la perpendicolare FL ad una qualunque corda OC; imperciocchè essendo F il centro dell'uno e dell'altro circolo, la retta FL taglierà per metà tanto DM, quanto CO, e però se dalle eguali LC, LO si leveranno le eguali LD, LM, rimangono eguali le CD, MO.

PROBLEMA IX.

104. *Data la retta indefinita* NZ (Fig. 29.), *e dati in essa tre punti* N, A, K, *si ricerca il quarto* M *tale, che sia* NM *terza proporzionale di* NK, AM.

Poichè sono dati i tre punti N, A, K, sia $NA = a$, $NK = b$, e chiamata $AM = x$, sarà $NM = a + x$, adunque per la condizione del problema avremo $b, x :: x, a + x$, e ridotta l'analogia in equazione, $xx = ab + bx$, o sia $xx - bx = ab$, che è una quadratica affetta. Si aggiunga perciò all'uno, ed all'altro membro il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè $\frac{bb}{4}$, e sarà $xx - bx + \frac{bb}{4} = ab + \frac{bb}{4}$, e cavando la radice, $x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{ab + \frac{bb}{4}}$, o sia $x = \frac{b \pm \sqrt{4ab + bb}}{2}$.

Sulla retta NZ indefinitamente prodotta d'ambe le parti si prendano le AR, AQ eguali tra loro; ed eguali ciascuna ad $NK = b$, ed RF quadrupla di NA, cioè $= 4a$,

 sarà

ſarà $AF = 4a + b$; al diametro FQ ſi deſcriva il ſemicircolo FHQ, ſarà l'ordinata nel punto A, cioè $AH = \sqrt{4ab + bb}$, quindi aggiunta in diretto $AO = NK = b$, e diviſa OH per metà in S, ſarà $OS = \frac{b + \sqrt{4ab + bb}}{2} = x$; adunque preſa $AM = OS$, ſarà M il punto cercato, riſpetto alla radice poſitiva. Ed in fatti, deſcritti i rettangoli SN, AV, MO, e condotte le diagonali AI, AE, poichè $OS = \frac{b + \sqrt{4ab + bb}}{2}$, ſarà $AS = \frac{\sqrt{4ab + bb} - b}{2}$, ed il rettangolo di $OS \times SA$ ſarà eguale ad ab, cioè eguale al rettangolo di $OA \times AN$; adunque i lati di queſti rettangoli ſaranno in ragione reciproca, cioè ſarà $OA, OS :: SA, AN$, vale a dire $EM, MA :: IN, NA$; adunque ſaranno in diretto le due IA, AE, ed in conſeguenza ſimili i triangoli IVE, AOE, e però ſarà $AO, OE :: IV, VE$; ma $AO = NK$, $OE = AM$, $IV = OS = AM$, $VE = NM$, dunque NK, $AM :: AM, NM$; il che ec.

La ſopra poſta coſtruzione riguarda il ſolo valore poſitivo dell'incognita, eſſendoſi preſa la radicale affetta dal ſegno poſitivo; in ſimil maniera però ſi coſtruiſce anche il valore negativo. E però deſcritto l'altro ſemicircolo FhQ, e condotta l'ordinata Ah, ſarà $Oh = b - \sqrt{4ab + bb}$, quantità negativa, e diviſa Oh per metà in s, ſarà $Os = \frac{b - \sqrt{4ab + bb}}{2} = x$. Adunque la x è quantità negativa, e

e però, presa da A verso F la $Am = Os$, sarà m l'altro punto, che scioglie il problema. Imperciocchè sarà $As = Ah - sh = \frac{-b - \sqrt{4ab + bb}}{2}$, e però $Os \times sA = ab = OA \times AN$, adunque fatto il rettangolo Ns, e condotta la diagonale Ai, poichè $As \times sO = OA \times AN$, ed $AN = si$, sarà $As, si :: AO, Os$, e però $Os = Oe$, ma $Os = Am$, dunque $Ve = Nm$; ma per i triangoli simili AOe, iVe abbiamo $AO, Oe :: iV, Ve$, ed è $AO = NK$, $iV = Os = Oe = Am$, adunque sarà $NK, Am :: Am, mN$, il che ec.

Senza risolvere l'equazione $xx - bx - ab = 0$ del problema, si poteva da principio costruire per mezzo del numero 94. nella seguente maniera. Si prenda (*Fig.* 30.) $RO = NK = b$, ed in diretto $OD = NA = a$, e sul diametro RD si descriva il semicircolo RMD, sarà l'ordinata $OM = \sqrt{ab}$; Col diametro OR si descriva l'altro circolo $ARPO$, e dal punto M condotta per lo centro H la retta MN, e presa $AN = a$, $NK = b$, sarà AM il valore positivo dell'incognita; e presa dalla parte di A verso N la porzione $Am = PM$, sarà Am il valore negativo. Ommetto la costruzione della stessa equazione per mezzo del num. 95., perchè da sè è troppo chiara.

PROBLEMA X.

105. *Dato il diametro AE del semicircolo AFE (Fig. 31.), e date le due porzioni CB, CD dal centro C, ed alzate le perpendicolari DF, BH; nella BH prodotta si dimanda il punto G tale, che condotta al punto F la retta GF, sia il rettangolo di GF$\times$FD eguale al rettangolo di AC$\times$BD.*

Si conduca *FH* parallela ad *AE*, e si chiami il raggio $CA = r$, $CB = a$, $CD = b$, sarà $DF = \sqrt{rr - bb} = BH$, e sia $HG = x$. Poichè $HF = CB + CD = a + b$, sarà $GF = \sqrt{aa + 2ab + bb + xx}$, quindi per la condizione del problema averemo $\sqrt{aa + 2ab + bb + xx}\sqrt{rr - bb} = ar + br$, adunque levando l'asimmetrìa, sarà $aarr + 2abrr + bbrr = aarr + 2abrr + bbrr + rrxx - aabb - 2ab^3 - b^4 - bbxx$, e riducendo, $rrxx - bbxx - aabb - 2ab^3 - b^4 = 0$, cioè $xx = \frac{aabb + 2ab^3 + b^4}{rr - bb}$, e però estraendo la radice, $x = \pm \sqrt{\frac{aabb + 2ab^3 + b^4}{rr - bb}}$, cioè $x = \frac{ab + bb}{\sqrt{rr - bb}}$, ed $x = \frac{-ab - bb}{\sqrt{rr - bb}}$.

Deve adunque essere la x, che si cerca, eguale alla quarta proporzionale di *FD*, *DC*, ed *FH*; quindi poichè gli angoli in *D*, ed *H* sono retti, se si faranno gli angoli *GFH*, *gFH* eguali ciascuno all' angolo *CFD*, saranno simili i triangoli *GFH*, *gFH*, *CFD*, ed i punti *G*, *g* (cioè *G* rispetto al valore positivo, e *g* rispetto al negativo) soddisfaranno alla questione; imperciocchè sarà *FG*,

(*Fg*)

(Fg) ad FH :: FC, FD, ma $FH = BD$, $FC = AC$, adunque sarà GF (gF) a BD :: AC, FD, e però GF (gF) in $FD = BD \times AC$ ec.

E' facile il vedere, che rispetto al valore positivo basterà condurre FG tangente nel punto F, poichè essendo retti gli angoli GFC, HFD, tolto il comune HFC, saranno eguali gli angoli GFH, CFD.

PROBLEMA XI.

106. *Dalle estremità della data AB (Fig. 32.) condurre due rette AC, BC in modo, che facciano l'angolo ACB eguale al dato GDP, e che la somma de' quadrati di AC, e di BC sia al triangolo ABC nella data ragione di* 4d *ad* a.

Si divida AB per metà in E, e si faccia $EH = x$, $HC = y$; adunque, poichè il problema è determinato, e si sono prese due incognite, converrà ritrovare due equazioni; sia $EA = a$, sarà $AH = a - x$, $HB = a + x$, e però il quadrato di AC sarà $= aa - 2ax + xx + yy$, il quadrato di CB sarà $= aa + 2ax + xx + yy$, ed il triangolo $ACB = ay$; ma per la seconda condizione del problema la somma di questi quadrati deve essere al triangolo ABC nella data ragione di $4d$ ad a; adunque averemo $2aa + 2xx + 2yy$, ay :: $4d$, a, e però l'equazione $aa + xx + yy = 2dy$. Deve in oltre essere l'angolo ACB eguale all'angolo dato GDF, e però prodotta PD, se l'angolo GDP è ottu-

ottuso, e presa DG ad arbitrio, si tiri GF normale a PF, sarà noto l'angolo GDF, essendo dato l'angolo GDP; e perchè di più è nota DG, che è stata presa ad arbitrio, saranno date le due, DF che si ponga $=b$, e GF, che pongasi $=c$; adunque condotta dal punto A normalmente a BC prodotta la AI, dovranno essere simili i due triangoli GDF, ACI. Ora per la similitudine de' triangoli BCH, BAI, si avrà $AI = \frac{2ay}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}}$, $BI = \frac{2aa+2ax}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}}$, e però $CI = \frac{aa-xx-yy}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}}$; adunque dovendo essere CI, $AI :: DF$, FG, avremo $\frac{aa-xx-yy}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}}$, $\frac{2ay}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}} :: b$, c; e però la seconda equazione $2aby = aac - cxx - cyy$.

Per eliminare una delle due incognite, dalla prima, e dalla seconda delle due equazioni si cavi (per il num. 82.) il valore del quadrato xx, cioè dalla prima, $xx = 2dy - yy - aa$, dalla seconda, $xx = aa - yy - \frac{2aby}{c}$, e quinci l'equazione $2dy - yy - aa = aa - yy - \frac{2aby}{c}$, cioè $dy = aa - \frac{aby}{c}$, o sia (fatta $\frac{ab}{c} = f$) $y = \frac{aa}{d+f}$, valore della y dato per le sole cognite, e sostituito questo valore in luogo della y nell' equazione $xx = 2dy - yy - aa$, avrassi finalmente $xx = \frac{2aad}{d+f} - \frac{a^4}{\overline{d+f}^2} - aa$, cioè $xx = \frac{aadd - aaff - a^4}{\overline{d+f}^2}$,

e

e però $x = \pm \frac{a\sqrt{dd - ff - aa}}{d+f}$, valore dato per le sole quantità cognite.

Si conduca AK indefinita, che faccia l'angolo KAB eguale al dato GDP, e dal punto E si abbassi la perpendicolare indefinita EM, e dal punto A la retta AL perpendicolare ad AK. Poichè fatta DR perpendicolare a PD, l'angolo RDG è eguale all'angolo DGF, sarà similmente l'angolo LAE eguale allo stesso DGF, ed in oltre sono retti gl'angoli E, F; adunque saranno simili i triangoli LAE, GDF, e però $EL = \frac{ab}{c} = f$, $AL = \sqrt{aa + ff}$. In EL prodotta si prenda $LM = d$, e col centro L, raggio LM si descriva un circolo, che taglierà AK in K; poichè l'angolo KAL è retto, sarà l'ordinata $AK = \sqrt{dd - ff - aa}$, quindi fatta $EN = AK$, e condotta MA, e ad essa parallela la NH dal punto N, sarà $ME, EA :: NE, EH$; cioè $d+f, a :: \sqrt{dd - ff - aa}$, $EH = \frac{a\sqrt{dd - ff - aa}}{d+f} = x$. Ciò fatto, col centro L, e col raggio LA si descriva il circolo OCQ, e sul punto H alzata la normale CH, si conducano CA, CB, il triangolo ACB sarà il ricercato. Imperocchè, per la 32. del terzo libro d'Euclide, l'angolo ACB è eguale all'angolo KAE, cioè, per la costruzione, eguale all'angolo GDP, e per la proprietà del circolo, $PC = \sqrt{OP \times PQ} = \frac{df + ff + aa}{d+f}$, e però $HC = \frac{aa}{d+f}$, e facendo il calcolo trove-

veremo, che la somma de' quadrati di AC, e CB è appunto al triangolo ACB nella data ragione di $4d$ ad a; il che ec.

Il segno ambiguo dell' equazione finale ci dà due valori eguali della x, uno positivo, e l'altro negativo; se adunque EH preso verso A si considera positivo, sarà Eh preso verso B ed eguale ad EH il valore negativo, che ci somministrerà la stessa costruzione.

E' chiaro, che il problema sarà impossibile ogni qualvolta non sia dd maggiore di $ff + aa$, cioè LM maggiore di LA, perchè allora il radicale sarà immaginario.

PROBLEMA XII.

107. *Dato (Fig. 33.) il semicircolo* BED, *e nel diametro prodotto dato un punto* A, *da esso condurre una secante* AE *tale, che la intercetta* GE *sia eguale al raggio* CB.

Sia $CB = c$, $AB = b$, $AD = a$, ed $AG = x$; sarà dunque, per la condizione del problema, $AE = c + x$; ma per la trentesima sesta del terzo d'Euclide il rettangolo EAG è eguale al rettangolo DAB, e però avremo l'analogia AE, $AD :: AB$, AG, cioè $c + x$, $a :: b$, x, adunque sarà l'equazione $xx + cx = ab$, che è una quadratica affetta, ed al solito risoluta ci darà $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}$.

Sulla

Sulla retta DA prodotta presa $AR = AB = b$, si descriva al diametro RD il semicircolo ROD, e condotta l'ordinata AO, che sarà $= \sqrt{ab}$; normale ad AO si tiri $OM = \frac{1}{2}c$, sarà $AM = \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$; quindi col centro M, col raggio MO si descriva il semicircolo QOP, sarà $AQ = \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}$, valore positivo della x, ed AP sarà $= \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} + \frac{c}{2}$, e però AP presa negativa sarà il valore negativo. Adunque se col centro A, e col raggio AQ si descriverà un' arco, taglierà esso il semicircolo BED nel punto ricercato G; e se nella parte inferiore si descriverà sul diametro $RH = BD$ il semicircolo RGH, l'arco dal medesimo centro A col raggio AP descritto lo taglierà nel punto ricercato G, che spetta al valore negativo. Imperciocchè essendo $EA \times AG = DA \times AB$, cioè $EA \times \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2} = ab$, sarà $EA = \frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}}$, e però $EG = \frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} + \frac{c}{2}$, cioè, riducendo al comun denominatore, $EG = \frac{-\frac{cc}{2} + c\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}}$,

e facendo attualmente la divisione, sarà finalmente $EG = c$, come deve essere.

Lo stesso calcolo procede rispetto alla costruzione del valore negativo, servendosi del rettangolo HAR in luogo di DAB.

Anche sinteticamente si può dimostrare la soluzione del problema così.

Essendo $\overline{AO}^2 = RAD$, ed $EAG = DAB$, e per la costruzione, $AR = AB$, $AQ = AG$, $QP = BC$, $MO = MQ$, sarà $\overline{AO}^2 + \overline{OM}^2$, cioè $\overline{AM}^2 = EAG + \overline{QM}^2$, cioè, per la quarta del secondo d'Euclide, $\overline{AQ}^2 + 2AQM + \overline{QM}^2 = EAG + \overline{QM}^2$, e levato il comune $\overline{QM}^2$, sarà $\overline{AQ}^2 + 2AQM = EAG$, e per la terza dello stesso libro, $\overline{AQ}^2 + 2AQM = EGA + \overline{GA}^2$; ma $AQ = AG$, dunque sarà $2AQM = EGA$, cioè $AQ, AG :: EG, 2QM$, e però $EG = 2QM = BC$; il che ec.

PROBLEMA XIII.

108. *Dati due archi di circolo, e le tangenti loro, ritrovare cosa sia la tangente della somma dei due dati archi.*

Sieno (*Fig.* 8.) i due archi dati AH, HD, e le tangenti $AI = a$, $HK = b$, il raggio $CA = r$, la tangente della somma de' due archi dati sia $AB = x$, sarà $CB = \sqrt{rr + xx}$, $CI = \sqrt{rr + aa}$, $CK = \sqrt{rr + bb}$, ed abbassata la DE perpen-

pendicolare a CA, e DF perpendicolare a CH, per la similitudine de' triangoli CBA, CDE sarà $CE = \frac{rr}{\sqrt{rr+xx}}$, $ED = \frac{rx}{\sqrt{rr+xx}}$, e per la similitudine de' triangoli CKH, CDF, sarà $DF = \frac{br}{\sqrt{rr+bb}}$, e perchè simili pure sono i triangoli CAI, CEO, DFO, averassi $EO = \frac{ar}{\sqrt{rr+xx}}$, $CO = \frac{r\sqrt{rr+aa}}{\sqrt{rr+xx}}$, $DO = \frac{b\sqrt{rr+aa}}{\sqrt{rr+bb}}$, e però averassi l'equazione $ED = EO + OD$, cioè $\frac{ar}{\sqrt{rr+xx}} + \frac{b\sqrt{rr+aa}}{\sqrt{rr+bb}} = \frac{rx}{\sqrt{rr+xx}}$, o sia $\frac{rx-ar}{\sqrt{rr+xx}} = \frac{b\sqrt{rr+aa}}{\sqrt{rr+bb}}$, e quadrando, per liberarla dai radicali, sarà $\frac{rrxx - 2arrx + aarr}{rr+xx} = \frac{bbrr+aabb}{rr+bb}$, e riducendo al comun denominatore, e togliendo i termini, che si elidono, sarà $r^4xx - 2ar^4x - 2abbrrx + aar^4 = aabbxx + bbr^4$, cioè $xx - \frac{2ar^4x - 2abbrrx}{r^4 - aabb} = \frac{bbr^4 - aar^4}{r^4 - aabb}$, quadratica affetta; adunque aggiunto all' uno, ed all'altro membro il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè il quadrato

di $-\frac{ar^4 - abbrr}{r^4 - aabb}$, farà $xx - \frac{2ar^4 x - 2abbrrx}{r^4 - aabb} + \frac{aar^8 + 2aabbr^6 + aab^4 r^4}{\overline{r^4 - aabb}^2} = \frac{bbr^4 - aar^4}{r^4 - aabb} + \frac{aar^8 + 2aabbr^6 + aab^4 r^4}{\overline{r^4 - aabb}^2}$,

e però cavando la radice, e riducendo al comune denominatore l'omogeneo di comparazione, $x - \frac{ar^4 - abbrr}{r^4 - aabb} =$

$\pm \sqrt{\frac{bbr^8 + 2aabbr^6 + a^4 bbr^4}{\overline{r^4 - aabb}^2}}$; ma la quantità fotto il vincolo è un quadrato, e la radice è $\frac{br^4 + aabrr}{r^4 - aabb}$, o pure $-\frac{br^4 - aabrr}{r^4 - aabb}$, adunque prendendo in primo luogo la radice pofitiva, farà $x = \frac{ar^4 + abbrr + aabrr + br^4}{r^4 - aabb}$, e prefa la negativa, farà $x = \frac{ar^4 + abbrr - aabrr - br^4}{r^4 - aabb}$; ma nel primo cafo tanto il numeratore, quanto il denominatore fono divifibili per $rr + ab$, ed il quoziente è $\frac{arr + brr}{rr - ab}$, e nel fecondo cafo tanto il numeratore, quanto il denominatore fono divifibili per $rr - ab$, ed il quoziente è $\frac{arr - brr}{rr + ab}$; adunque i due valori dell' incognita fono $x = \frac{rr \times \overline{a + b}}{rr - ab}$; $x = \frac{rr \times \overline{a - b}}{rr + ab}$, il primo de' quali fervirà per

per la tangente della somma degl' archi dati, il secondo per la tangente della differenza (come appunto si trova sciogliendo il problema in questo caso) il quale valore sarà positivo, o negativo, secondo che l' arco, o sia la tangente a sarà maggiore, o minore della tangente b.

Ciò posto, non è difficile passare alla soluzione generale del problema, cioè dati quanti si vogliano archi con le loro tangenti, ritrovare la tangente della somma di tutti questi archi, il che si potrà fare nella seguente maniera.

Sieno in primo luogo tre gli archi dati, e le tangenti loro sieno a, b, c. Per l'antecedente soluzione sarà $\frac{rr \times \overline{a+b}}{rr - ab}$ la tangente della somma di due archi, de' quali le tangenti sieno a, b; si chiami questa tangente z, e però sarà $z = \frac{rr \times \overline{a+b}}{rr - ab}$, ma per la stessa soluzione sarà $\frac{rr \times \overline{z+c}}{rr - zc}$ la tangente della somma di due archi, de' quali le tangenti sieno z, c, e z è la tangente della somma di due archi delle tangenti a, b; adunque $\frac{rr \times \overline{z+c}}{rr - zc}$ sarà la tangente della somma di tre archi delle tangenti a, b, c, e sostituendo in questa espressione in luogo di z il suo valore $\frac{rr \times \overline{a+b}}{rr - ab}$, avremo la tangente della somma di tre archi

eſpreſſa con le ſole tangenti date a, b, c, la quale ſarà $\frac{rr \times \overline{a + b + c} - abc}{rr - ab - ac - bc}$. Con lo ſteſſo artifizio averemo la tangente della ſomma di quattro archi, eſſendo le tangenti date a, b, c, f, e ſarà

$$\frac{rr \times \overline{arr + brr + crr + frr - abc - abf - acf - bcf}}{rr \times \overline{rr - ab - ac - af - bc - bf - cf + abcf}}$$

La tangente della ſomma di cinque, eſſendo le tangenti date a, b, c, f, g, ſarà

$$\frac{r^4 \times \overline{a + b + c + f + g} - rr \times \overline{abc + abf + acf + abg + bcf + acg + bcg + bff + afg + cfg} + abcfg}{rr \times \overline{rr - ab - ac - af - ag - bc - bf - bg - cf - cg - fg} + abcf + abcg + abfg + acfg + bcfg},$$

e così di quant' altri archi ſi vuole; dalle quali coſe ſi cava una regola generale per formare la frazione, che eſprima la tangente della ſomma di quanti ſi voglia archi dati, e ſarà queſta:

Per formare il numeratore della frazione ſi prendano le ſomme di tutti i poſſibili prodotti di numero diſpari, che ſi poſſono fare colle tangenti date, per eſempio, ſe le tangenti ſono ſette, ſi prenda la ſomma di tutte queſte tangenti, indi la ſomma di tutti i terni, che fare ſi poſſono, poi la ſomma di tutte le cinquine, e finalmente il prodotto di tutte ſette; queſte ſomme ſi moltiplichino per tanta poteſtà del raggio, quanta a ciaſcuna fa biſogno, perchè ſieno di dimenſione maggiore d'un' unità del numero delle tangenti date, ed a queſte ſomme ſi prefigga alter-

alternativamente il ſegno + e — , cioè alla ſomma di tutte il ſegno + , alla ſomma di tutti i terni il ſegno — , e così di mano in mano , e ſarà fatto il numeratore .

Per formare il denominatore ſi prenda il quadrato del raggio , indi la ſomma di tutti i prodotti di numero pari , che ſi poſſono fare colle tangenti date , cioè tutti gli ambi , tutti i quaderni ec. , queſto quadrato del raggio , e la ſomma di tutti gli ambi , di tutti i quaderni , di tutte le ſeſtine ec. ſi moltiplichino in tanta poteſtà del raggio , quanta a ciaſcuna fa biſogno , perchè ſieno di dimenſione eguale al numero delle tangenti date . Al quadrato del raggio ſi prefiggà il ſegno + , a tutti gli ambi il ſegno — , a' quaderni il ſegno + , e così alternativamente , e ſarà fatto il denominatore .

La regola per ſapere quanti ſieno tutti gli ambi , e terni ec. poſſibili di un numero di quantità date ſarà queſta :

Si ſcriva il numero delle quantità date , indi ſi proſeguiſca la ſerie decreſcente de' numeri naturali ; ſotto eſſi numeri per ordine ſi ſcriva la ſerie creſcente de' numeri naturali cominciando dall'unità ; poſcia ſi faccia il prodotto di tanti termini della ſerie di ſopra , quanto è l'indice della combinazione , che ſi vuol fare ; ſi faccia pure il prodotto d'altrettanti termini della ſerie di ſotto , e ſi divida un prodotto per l'altro , il quoziente ſarà il numero cercato . Così per ſapere quanti ambi , terni ec. ſi poſſono

fare ,

fare, per esempio, di cinque quantità, si scriva 5, 4, 3, 2, 1.
1, 2, 3, 4, 5.
Il prodotto de' due primi numeri della serie di sopra è 20, che diviso per il prodotto de' due primi numeri della serie di sotto dà di quoziente 10; e però 10 saranno gli ambi. Il prodotto de' primi tre termini è 60, che diviso per il prodotto de' primi tre termini di sotto, cioè per 6, dà di quoziente 10, e però saranno 10 i terni ec.

Dalla soluzione di questo Problema si cava, come corollario, la soluzione di un'altro più semplice, cioè data la tangente di un' arco, ritrovare la tangente di un' arco moltiplo secondo un qualunque dato numero; imperocchè in questo caso basta fare tutte le tangenti date eguali tra loro, ed eguali alla tangente dell' arco dato. Sia per esempio la tangente dell'arco dato $= a$, e si cerchi la tangente dell'arco doppio, triplo ec. Nella formola, che abbiamo ritrovata per la tangente della somma di due archi dati, in vece della lettera b si ponga sempre a, ed avremo la formola o espressione dell' arco doppio $\frac{2arr}{rr - aa}$.
Nella formola per la tangente della somma di tre archi dati in vece di b, e di c si ponga per tutto a, ed avremo l'espressione dell' arco triplo $\frac{3arr - a^3}{rr - 3aa}$. Similmente dell' arco quadruplo sarà $\frac{4ar^4 - 4a^3rr}{r^4 - 6aarr + a^4}$,

dell'

dell'arco quintuplo farà $\frac{5ar^4 - 10a^3rr + a^5}{r^4 - 10aarr + 5a^4}$, e così fuccessivamente.

Quindi si può formare la seguente progressione, o sia canone generale per la tangente d'un' arco moltiplo secondo un qualunque numero intiero n

$$\frac{nr^{n-1}a - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} r^{n-3} a^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{1.2.3.4.5} r^{n-5} a^5 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{1.2.3.4.5.6.7} r^{n-7} a^7 \text{ ec.}}{r^{n-1} - \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} r^{n-3} aa + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4} r^{n-5} a^4 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{1.2.3.4.5.6} r^{n-7} a^6 \text{ ec.}}$$

Ritrovata la tangente di un'arco moltiplo secondo un qualunque numero intiero, facilmente si scioglie il problema inverso; cioè, data la tangente di un'arco, ritrovare la tangente d'un'arco submultiplo secondo un qualunque numero intiero, vale a dire dividere un qualunque arco, o angolo in quante parti si vuole eguali. Imperocchè sia la tangente dell'arco dato b, ed n il numero, secondo cui si vuole l'arco submultiplo, si prenda la tangente ritrovata per l'arco multiplo per lo numero n, in luogo di a si ponga x, e così x farà figura di tangente dell'arco submultiplo. Questa tangente dell'arco multiplo è adunque eguale alla data b, onde si avrà l'equazione, che si cercava per la incognita x.

Essendo adunque data la tangente b, il raggio r, sarà l'equazione della tangente per l'arco subtriplo $x^3 - 3bxx - 3rrx + brr = 0$; per l'arco subquintuplo sarà $x^5 - 5bx^4 - 10rrx^3 + 10brrxx + 5r^4x - br^4 = 0$ ec.

T PRO-

PROBLEMA XIV.

109. *Ritrovare un triangolo* ALO (Fig. 34.), *i di cui lati* AO, LO, AL, *ed il perpendicolo* LI *sieno in geometrica continua proporzione*.

Si prenda ad arbitrio un lato, per esempio, $AL = a$, e sia $OL = x$, sarà per la condizione del problema $AO = \frac{xx}{a}$, ed $LI = \frac{aa}{x}$, e però $AI = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$, ed $IO = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$; adunque $AI + IO = AO$, cioè $\sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} = \frac{xx}{a}$, o sia $\frac{xx}{a} - \sqrt{xx - \frac{aa}{xx}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{xx}}$, e quadrando, $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a}\sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} + xx - \frac{a^4}{xx} = aa - \frac{a^4}{xx}$, cioè $\frac{x^4}{aa} + xx - aa = \frac{2xx}{a}\sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$, e di nuovo quadrando, $\frac{x^8}{a^4} + \frac{2x^6}{aa} + x^4 - 2x^4 - 2aaxx + a^4 = \frac{4x^6}{aa} - 4aaxx$, e finalmente riducendo al comun denominatore, ed ordinando l'equazione, sarà $x^8 - 2a^2x^6 - a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0$, la quale sembra essere dell'ottavo grado, ma se si osserverà, ch'ella è un quadrato, fatta l'estrazione della radice, si troverà $x^4 - aaxx - a^4 = 0$, che è una quadratica affetta, e però trasportato all'altra parte il termine a^4, ed aggiunto ad ambi i membri dell' equazione

ne $\frac{a^4}{4}$, ed estratta la radice colla solita regola delle quadratiche affette, sarà $xx - \frac{aa}{2} = \pm \frac{\sqrt{5a^4}}{2}$, cioè $xx = \frac{aa \pm \sqrt{5a^4}}{2}$, e finalmente $x = \pm \sqrt{\frac{aa \pm \sqrt{5a^4}}{2}}$.

Quattro adunque saranno i valori della nostra incognita, ma si avverta, che la quantità $\sqrt{5a^4}$ è maggiore di aa, e però se si prenda la radicale $\sqrt{5a^4}$ negativa, cioè $-\sqrt{5a^4}$, la quantità sotto il vincolo radicale comune sarà negativa, quindi il valore della x immaginario, e però due valori saranno immaginarj, cioè $x = \pm \sqrt{\frac{aa - \sqrt{5a^4}}{2}}$; e due reali, cioè $x = \pm \sqrt{\frac{aa + \sqrt{5a^4}}{2}}$, ambi eguali, ma positivo l'uno, e negativo l'altro.

Sull'indefinita AQ si prenda $AL = a$, $LC = a\sqrt{5}$, e $CB = \frac{a}{2}$, e descritto sul diametro AB il semicircolo AFB, si erigga la perpendicolare CF, sarà, per la proprietà del circolo, $CF = \sqrt{\frac{aa + aa\sqrt{5}}{2}} = x$. Divisa per metà AC in H, col centro A, raggio $AH = \frac{a + \sqrt{5aa}}{2} = \frac{xx}{a}$ si descriva l'arco HO, dal punto L si tiri $LO = CF$, e terminata all'arco HO, e si conduca AO, e la perpendicolare LI, sarà ALO il triangolo ricercato. Imperocchè essendo $AL = a$, $LO = x = \sqrt{\frac{aa + aa\sqrt{5}}{2}}$, $AO = AH = \frac{xx}{a} = \frac{a + \sqrt{5aa}}{2}$, sarà

AO, *LO* :: *LO*, *LA*. Ma i due quadrati di *AL*, e di *LO* presi assieme, cioè $\frac{aa + aa + aa\sqrt{5}}{2}$, sono eguali al quadrato di *AO*, cioè $\frac{6aa + 2a\sqrt{5aa}}{4}$, adunque l'angolo *ALO* è retto, e però sarà *AO*, *LO* :: *AL*, *LI*; ma perchè è pure *AO*, *LO* :: *LO*, *LA*, sarà anche *LO*, *LA* :: *LA*, *LI*, il che ec. L'altro valore negativo, che è eguale al positivo, servirebbe per la costruzione al di sotto della linea *AB*.

PROBLEMA XV.

110. *Dividere in tre parti eguali un dato angolo.*

Tre casi comprende il proposto Problema; l'uno quando l'angolo dato sia retto; l'altro quando sia ottuso; ed il terzo quando sia acuto.

In primo luogo sia (*Fig.* 35.) l'angolo retto *MAB*, che si supponga diviso in tre parti eguali dalle rette *AC*, *AD*, e sia $AB = a$, ed alzata in *B* la perpendicolare *BC*, prodotta incontri in *D* la *AD*, e dal punto *D* si conduca *DM* parallela ad *AB*, e si chiami $BC = x$, sarà $AC = \sqrt{aa + xx}$, ma poichè l'angolo *CAD* deve essere eguale all'angolo *DAM*, e per le parallele *AM*, *BD* l'angolo *DAM* è eguale all'angolo *ADC*, saranno eguali gli angoli *CDA*, *CAD*; e però $CD = CA = \sqrt{aa + xx}$, quindi $BD = x + \sqrt{aa + xx}$. Ma devono essere in oltre eguali i due

i due angoli BAC, CAD, o sia CDA, e però ne' due triangoli BDA, CAB sarà l'angolo CAB eguale all' angolo BDA, e l'angolo B retto è comune, adunque anche il terzo $BCA = BAD$, e però simili i triangoli; quindi averemo $AB, BC :: BD, AB$, cioè $a, x :: x + \sqrt{aa + xx}, a$, e però l'equazione $aa = xx + x\sqrt{aa + xx}$, e trasportando il termine xx, e quadrando, sarà $aaxx + x^4 = a^4 - 2aaxx + x^4$, cioè $3aaxx = a^4$, e finalmente $x = \pm\sqrt{\frac{aa}{3}}$.

Si produca AB in S, onde sia $BS = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}$; sul diametro AS si descriva il semicircolo ACS, l'ordinata BC sarà $= \sqrt{\frac{aa}{3}} = x$. Condotta adunque AC al punto C, e presa $CD = AC$, e condotta AD, sarà il dato angolo diviso in tre parti eguali. Imperocchè essendo $BC = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, sarà $AC = \sqrt{\frac{4aa}{3}} = CD$, ed $AD = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{aa + \frac{5aa}{3} + 2a\sqrt{\frac{4aa}{9}}} = 2a$, e però $AD, AB :: 2a, a :: 2, 1$; e $DC, CB :: \sqrt{\frac{4aa}{3}}, \sqrt{\frac{aa}{3}} :: 2, 1$, cioè nella medesima ragione di AD, AB; adunque, per la terza del sesto d'Euclide, l'angolo $BAC = CAD$, e per essere $CD = CA$, sarà pure l'angolo $CAD = CDA = DAM$, il che ec.

Il

Il valore negativo, che al positivo è eguale, servirebbe per la divisione dell' angolo mAB.

Sia l'angolo BAM ottuso (*Fig.* 36.), condotta parallela ad AM la BD, e fatto il resto come sopra, si tiri AR normale a BD. Poichè l'angolo ABD è noto, per essere il supplemento del dato MAB, e l'angolo R è retto, ed è data la AB, sarà pure nota ancora la BR, che si chiami $= b$, e però $AR = \sqrt{aa - bb}$, $CR = x - b$, $AC = \sqrt{aa - 2bx + xx} = CD$; $BD = x + \sqrt{aa - 2bx + xx}$, quindi per i triangoli simili ABC, ABD sarà $AB, BC :: BD, BA$, cioè $a, x :: x + \sqrt{aa - 2bx + xx}, a$, vale a dire $aa = xx + x\sqrt{aa - 2bx + xx}$, e levando l'asimmetrìa, $2bx^3 - 3aaxx + a^4 = 0$, equazione solida del terzo grado, che per ora si lascierà da me intatta.

Sia finalmente l'angolo BAM acuto (*Fig.* 37.), la perpendicolare dal punto A a DB prodotta caderà al di sotto del punto B in R, e però sarà $RC = b + x$, $AC = \sqrt{aa + 2bx + xx}$, quindi ripetuto lo stesso discorso del caso antecedente, averassi l'equazione $2bx^3 + 3aaxx - a^4 = 0$, diversa dall'antecedente solo ne' segni ec.

CAPO

CAPO III.

Della costruzione de' luoghi, e de' Problemi indeterminati, che non eccedono il secondo grado.

111. COsa sieno i problemi indeterminati, e come esiggano le due incognite si è veduto al num. 84. Dal variarsi adunque in infiniti modi il valore di una delle due incognite, in altrettanti infiniti modi pure si variano i valori dell'altra, quindi chiamansi esse le variabili dell' equazione o del problema, e la relazione loro o sia la legge, che osservano, viene espressa dall' equazione. Per tanto l'equazione $bx = ay$ ci fa sapere, che variandosi la x, si varia altresì la y, ma con tal legge, che la stessa x abbia sempre però alla y la costante ragione della a alla b; Così l'equazione $ab = xy$ esprime la legge, che il prodotto delle due incognite sia sempre costante, ed eguale al prodotto di a in b; L'equazione $ax = yy$ esprime, che il quadrato della y debba sempre essere eguale al rettangolo della x nella costante a, e così di tutte l'altre si discorra.

112. Una delle due incognite, per esempio x, deve avere origine da un punto fisso, e si prenda sopra una retta indefinita, indi se fissato per questa un determinato valore, dall' estremità si alzi un' altra retta nell' angolo dato del problema, e si prenda di tale grandezza, di quanta deve essere l'altra incognita y per la natura dell'

equa-

equazione relativamente al valore fissato per la x, e ciò si vada replicando per ogni vario valore, che si assegni alla x; la linea, che passerà per le estremità di tutte le y, si chiama il luogo dell'equazione. La incognita, che dal punto fisso si prende sulla retta indefinita, si dice l'Assissa, e l'altra in angolo l'Ordinata; ed ambe assieme diconsi le Coordinate dell'equazione.

Fatta adunque, rispetto all' equazione $bx = ay$, sull' indefinita AM (*Fig.* 38.) la $AB = a$, ed alzata in qualunque angolo la $BC = b$, se si prenda $x = AD$, sarà la quarta proporzionale parallela a BC, cioè $DE = y$; e presa $x = AF$, sarà $FG = y$; presa $x = AK$, sarà $KH = y$, e così d'infinite altre, e la linea, in cui trovansi tutti gl' infiniti punti C, E, G, H ec. in questo modo determinati, sarà il luogo dell' equazione $bx = ay$.

Nello stesso modo rispetto all'equazione $ax = yy$ (*Fig.* 39.) se si prenda $x = AB$, e BC eguale alla $\sqrt{ax}$, cioè media proporzionale fra AB, e la data a, sarà $BC = y$; e presa $x = AD$, e DE media proporzionale fra AD, ed a, sarà $DE = y$; presa $x = AG$, e GF media proporzionale tra AG ed a, sarà $GF = y$ ec.; ed i punti C, E, F, ed altri infiniti in simil modo determinati formano la linea $ACEF$, che è il luogo dell'equazione $ax = yy$, e medesimamente s'intenda d'ogni altra equazione.

113. Dalla diversa legge, che esprime l'equazione, cioè dalla diversa relazione, che tra se ânno le due incognite, diverse nascono le linee e di genere, e di grado,

o sia

o ſia i luoghi di modo, che è facile a vedere, che il luogo dell'equazione $bx=ay$ ſarà una linea retta; imperciocchè avendo la y alla x una coſtante ragione, per eſſere $y=\frac{bx}{a}$, una qualunque ED (*Fig.* 38.) ſarà ad AD, come una qualunque altra FG ad AF, e però ſimili ſaranno i triangoli AED, AGF; il che verificandoſi di qualunque altro punto H ec. biſognerà, che per neceſſità eſſi punti ſieno in una retta linea. Ma l'equazione $ax=yy$ eſigge non già, che (*Fig.* 39.) le BC, DE ec., ma bensì i loro quadrati abbiano una coſtante ragione alle corriſpondenti AB, AD ec., onde è, che non ſaranno in una retta, ma in una curva i punti C, E, F, ec. Così una curva di genere da queſta diverſo ſarebbe il luogo dell' equazione $xy=ab$; ed una curva di genere, e di grado diverſo il luogo di queſt'altra $a^3-x^3=y^3$, ed altre infinite.

114. Qualunque volta l'equazione non contenga in alcun termine nè il quadrato, o poteſtà maggiore dell'una o dell' altra incognita, nè il prodotto di eſſe, il luogo ſarà ſempre una linea retta.

115. E quando nell'equazione vi ſia il quadrato dell' una o dell'altra, o d'ambe le incognite, o il rettangolo loro, o pure e quelli, e queſto, comunque ſiaſi, ma però neſſun termine contenga poteſtà maggiore del quadrato di eſſe incognite, o prodotto maggiore del rettangolo; vale a dire, in neſſun termine le incognite o ſole, o aſſieme moltiplicate eccedano la ſeconda dimenſione,

il luogo ſarà ſempre una delle Sezioni Coniche d'Apollonio. Nè meglio ſi potranno dimoſtrare queſte verità, quanto col coſtruire attualmente tutte le varie equazioni di tal natura.

116. Le equazioni, che contengono le incognite ad una ſola dimenſione, cioè i luoghi alla linea retta, ſi chiamano luoghi, o linee del primo ordine, quelle che o ſole, o aſſieme moltiplicate le contengono a due dimenſioni, cioè i luoghi alle ſezioni coniche, ſi chiamano luoghi o linee del ſecondo ordine, e però curve del primo genere; ſi dicono linee o luoghi del terzo ordine, e però curve del ſecondo genere quelle equazioni, nelle quali le incognite aſcendono alla terza dimenſione, e così ſucceſſivamente.

117. E quanto ai luoghi alla linea retta; ſi comprendono eſſi tutti ſotto queſte equazioni.

$$y = \frac{ax}{b}$$

$$y = -\frac{ax}{b}$$

$$y = \frac{ax}{b} + c$$

$$y = -\frac{ax}{b} - c$$

$$y = \frac{ax}{b} - c$$

$$y = -\frac{ax}{b} + c$$

giac-

giacchè con la moltiplicazione, e divisione si può sempre ridurre la y ad essere libera da frazioni, e coefficienti. Per $\frac{a}{b}$ s'intenda l'aggregato di tutte le quantità note, che moltiplicano la x, e per c l'aggregato di tutte le quantità, che formano il termine costante.

Per costruire le prime due; sulla AD indefinitamente prodotta d'ambe le parti si prenda $AB = b$, e si alzi $BC = a$, (*Fig.* 40.) che faccia l'angolo ABC, che devono fare le due variabili del problema; per i punti A, C si conduca una retta indefinita HE, sarà essa il luogo delle due equazioni $y = \frac{ax}{b}$, $y = -\frac{ax}{b}$; imperciocchè presa una qualunque $AD = x$, e condotta DE parallela a BC, sarà $DE = \frac{ax}{b} = y$; e presa $AF = -x$, e condotta FH parallela a BC, sarà $FH = -\frac{ax}{b} = y$.

La terza, e quarta si costruiranno così: Parallelamente a BC si prenda $AN = AM = c$, e si conducano NK, MG indefinite, e parallele ad HE, sarà NK il luogo della equazione $y = \frac{ax}{b} + c$, ed MG il luogo dell' equazione $y = -\frac{ax}{b} - c$; poichè, presa $AD = x$, sarà $DE = \frac{ax}{b}$, ma è $EK = AN = c$ (fatta DK parallela a BC) dunque $DK = \frac{ax}{b} + c = y$; e presa $AF = -x$, e fatta FG parallela a BC, sarà $FG = -\frac{ax}{b} - c = y$.

 Ris-

Rispetto alla quinta; fatto lo stesso triangolo ABC, (*Fig.* 41.) e prodotte indefinitamente le AE, AD, si abbassi $AM=c$, e parallela a BC; indi dal punto M si conduca MK indefinita parallela ad AE, che incontrerà in Q la retta AD, sarà QK il luogo dell'equazione $y=\frac{ax}{b}-c$; imperocchè, presa una qualunque $AD=x$, e fatta DE parallela a BC, sarà $DE=\frac{ax}{b}$; ma $KE=AM=c$, dunque $DK=\frac{ax}{b}-c=y$. La porzione QM servirà quando $\frac{ax}{b}$ sia minore di c, cioè quando x si prenda minore di AQ, o sia minore di $\frac{bc}{a}$, poichè in questo caso la y sarà negativa, e però dovrà prendersi al di sotto di AD, cioè in senso contrario della DK.

Finalmente per l'ultima; fatta $AB=b$, $BC=a$, (*Fig.* 42.) e l'angolo ABC eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le due variabili del problema, sia $AM=c$ e parallela a BC, e si tiri MQR parallela ad AC, che taglierà AB prodotta in Q, sarà MQR il luogo dell'equazione $y=c-\frac{ax}{b}$; poichè, presa una qualunque $AD=x$, e fatta DE parallela a BC, sarà $DE=\frac{ax}{b}$, ma prodotta ED in K, sarà $EK=AM=c$, adunque $DK=c-\frac{ax}{b}=y$. Che se si prenda x maggiore

re di AQ, per esempio $= AI$, sarà $IT = \frac{ax}{b}$, e però $c - \frac{ax}{b}$ quantità negativa $= y = IP$ presa appunto in senso contrario della DK, e la indefinita MR il luogo dell' equazione proposta nell'uno, e nell'altro caso.

118. Occorre alle volte, che nella soluzione di un qualche problema, il di cui luogo sia alla linea retta, o l'una, o l'altra sparisce delle due variabili, e non entra nell'equazione, in questi casi il luogo sarà alla perpendicolare, o alla parallela alla data retta, sopra di cui si prendono le assisse, secondo che o l'ordinata sparisce, o l'assissa.

Eccone due Esempj:

Data la retta AB, (*Fig.* 43.) si ricerca il luogo de' punti M fuori di essa tali, che condotte le rette MA, MB alle estremità di AB, sia sempre $MA = MB$. Presa una qualunque $AH = x$, si alzi $HM = y$, e fatta $AB = a$, sarà $HB = a - x$, $AM = \sqrt{xx + yy}$, $BM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, e però l'equazione $\sqrt{xx + yy} = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, e quadrando, $xx + yy = aa - 2ax + xx + yy$, cioè $\frac{a}{2} = x$, in cui la y è sparuta, e la x è rimasta determinata; e ciò vuol dire, che presa x eguale alla AH metà di AB, e dal punto H alzata la perpendicolare indefinita, ogni punto di essa soddisfarà alla questione, e però essa sarà il luogo ricercato.

Sieno

Sieno date di posizione le parallele CG, AP, (*Fig.* 44.) e tra esse si cerchi il luogo di tutti i punti M tali, che condotta MP perpendicolare ad AP, ed MG, che faccia l'angolo MGC eguale a un dato AEC, sia sempre MP ad MG nella costante ragione di a alla b. Chiamata la distanza $AC = c$, $AP = x$, $PM = y$, e prodotta PM in F, sarà $FM = c - y$, ma poichè è dato l'angolo AEC, e l'angolo ACE è retto, ed è dato il lato AC, sarà anche noto il lato AE, che si chiami $= f$. Ora, per la similitudine de' triangoli ACE, FMG, sarà $AC, AE :: MF, MG$, cioè $c, f :: c - y$, $\frac{cf - fy}{c} = MG$; ma deve in oltre essere PM, $MG :: a, b$, dunque sarà y, $\frac{cf - fy}{c} :: a, b$; e però $bcy = acf - afy$, o sia $y = \frac{acf}{bc + af}$; ed ecco l'equazione senza, che v'entri l'incognita x. Adunque presa comunque si voglia la x, sarà sempre costante la y, ed eguale ad $\frac{acf}{bc + af}$, e però condotta la indefinita BM parallela ad AP, e distante da essa AP quant'è $\frac{acf}{bc + af}$, sarà essa il luogo cercato.

119. Spiegate le costruzioni dei luoghi alla linea retta, vengono le costruzioni delle equazioni del secondo grado, cioè de' luoghi alle Sezioni Coniche. E quì suppongo prima informati abbastanza i Lettori delle principali proprietà geometriche di esse sezioni del co-

no,

no, per indi formare le prime e più semplici equazioni di esse curve, alle quali semplici equazioni si possano poi ridurre e rapportare, coi metodi da spiegarsi, le equazioni più complicate.

Ed in primo luogo si sa, che nel circolo una qualunque ordinata è media proporzionale tra i segmenti del diametro; cioè, che il quadrato di essa è eguale al rettangolo degli stessi segmenti. Se adunque nel circolo $MKCN$ (*Fig.* 45.) si farà il raggio $AC=a$, e dal centro A una qualunque assissa $AB=x$, e l'ordinata BD perpendicolare $=y$, sarà $MB=a+x$, $BC=a-x$, e però $MB \times BC=aa-xx$; adunque sarà $yy=aa-xx$, equazione al circolo rispetto al quadrante KC. Ma poichè la stessa proprietà si verifica anche, presa per ordinata BE, cioè l'ordinata negativa $-y$, e tanto il quadrato di y, quanto di $-y$ è yy, adunque la stessa equazione compete ancora al quadrante CN. Che se si prendano le assisse negative, come $AH=-x$, e le ordinate $HF=y$, $HG=-y$, il quadrato loro, cioè yy sarà in ambi i casi eguale al rettangolo $MH \times HC$, ma quando sia $AH=-x$, sarà $CH=CA+AH=a-x$, ed $MH=AM-AH=a+x$, per le regole della somma, e sottrazione; e però il rettangolo $MH \times HC$ sarà $aa-xx$, adunque $yy=aa-xx$ è l'equazione semplicissima, che compete a tutto il circolo del raggio a, prendendo le assisse dal centro.

Se si prenderanno le assisse non dal centro A, ma

ma dall'estremità M del diametro, fatta una qualunque MH, o MB eguale ad x, sarà HC, o $BC = 2a - x$, ed il rettangolo de' segmenti eguale a $2ax - xx$; ma il quadrato dell'ordinata sì positiva, come negativa è yy, adunque sarà $yy = 2ax - xx$, equazione semplicissima del medesimo circolo, prendendo le assisse non dal centro, ma dall'estremità del diametro.

Per la quantità a, che esprime il raggio, s'intenda una qualunque quantità data semplice, o complessa, intiera, o rotta, razionale, o sorda di modo, che $yy = aa - bb - xx$ sarà il circolo del raggio $= \sqrt{aa - bb}$; $yy = \frac{aab}{m} - xx$ sarà il circolo del raggio $= \sqrt{\frac{aab}{m}}$; $yy = a\sqrt{ab} - xx$ sarà il circolo del raggio $\sqrt{a\sqrt{ab}}$; così $yy = 2ax - bx - xx$ sarà il circolo del diametro $2a - b$, o sia del raggio $\frac{2a - b}{2}$; $yy = \frac{aax + abx}{b} - xx$ sarà il circolo del diametro $= \frac{aa + ab}{b}$; $yy = x\sqrt{ab} - xx$ sarà il circolo del diametro $= \sqrt{ab}$ ec.

E' manifesto, che se nell'equazione $yy = aa - bb - xx$, ed in tutte le altre simili, la quantità b fosse maggiore di a, essendo allora $aa - bb$ quantità negativa, il circolo sarebbe immaginario, poichè se $yy = aa - bb - xx$, è anche $y = \sqrt{aa - bb - xx}$; ma quando $aa - bb$ sia quantità negativa, y è eguale a radice quadrata di quantità negativa, e però immaginaria.

Per

Per la ſteſſa ragione degl'immaginarj non può nell' equazione $yy = 2ax - xx$ la aſſiſſa x prenderſi negativa, imperciocchè, preſa x negativa, ſarebbe negativo il termine $2ax$, e però l'equazione $yy = -2ax - xx$, cioè $y = \sqrt{-2ax - xx}$ quantità immaginaria.

120. La primaria proprietà della Parabola Apolloniana è, che il quadrato di una qualunque ordinata ſia eguale al rettangolo del parametro nell'aſſiſſa ſull'aſſe, ſe l'angolo delle coordinate è retto, o ſul diametro, ſe eſſo angolo è obbliquo. Adunque chiamato il parametro $= a$, una qualunque aſſiſſa $AB = x$, (*Fig.* 46.) la corriſpondente ordinata poſitiva $BC = y$, e la negativa $BD = -y$, ſarà yy il quadrato tanto di BC, quanto di BD, ed ax ſarà il rettangolo del parametro in AB, adunque $yy = ax$ è l'equazione ſempliciſſima, che compete alla parabola del parametro $= a$, in cui è chiaro, non poterſi prendere le aſſiſſe x negative per cagione degl'immaginarj. E quì pure per la quantità a, che eſprime il parametro, s'intenda una qualunque quantità data, in cui ſia moltiplicata l'aſſiſſa x di modo, che $\frac{aax \pm bbx}{c} = yy$ ſarà la parabola del parametro $= \frac{aa \pm bb}{c}$; $x\sqrt{ab} = yy$ ſarà la parabola del parametro $= \sqrt{ab}$ ec.

Se la parabola foſſe diverſamente poſta, (come nella *Fig.* 47.) e ſulla ſteſſa AB dal dato punto A ſi voleſſero le x, ſarebbe l'equazione $xx = ay$, in cui ſi poſſono prendere le x poſitive e negative, ma ſolo poſitive le y.

121. Sieno le opposte Iperbole riferite agl'assi, o diametri, secondo che è retto, o obbliquo l'angolo delle coordinate, e sia CB (*Fig.* 48.) l'asse, o il diametro trasverso, HE il conjugato. Per la nota proprietà dell' iperbola, preso un qualunque punto D, ed alzata DM parallela ad HE, deve essere il rettangolo di $CD \times DB$ al quadrato di DM, come il quadrato di CB al quadrato di HE. Adunque chiamata $CB = 2a$, $HE = 2b$, e dal centro A presa una qualunque $AD = x$, DM positiva $= y$, DM negativa $= -y$, sarà $CD = a + x$, $BD = x - a$, e però, per la detta proprietà, $xx - aa$, $yy :: 4aa$, $4bb$; cioè $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$. E presa Ad negativa $= -x$, e le ordinate come sopra, sarà $Bd = -x + a$, $Cd = -x - a$, ed il rettangolo di $Bd \times dC = xx - aa$; onde nella stessa maniera avrassi $\frac{aayy}{bb} = xx - aa$, equazione semplicissima, che esprime le due intere opposte iperbole riferite agl'assi o diametri, prendendo le assisse dal centro. E se si prenderanno le assisse dal vertice C, avrassi l'analogìa (per la stessa proprietà) $x \times \overline{x - 2a}$, $yy :: 4aa$, $4bb$; cioè l'equazione $-2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$. E prese finalmente le assisse dal vertice B, avrassi $x \times \overline{2a + x}$, $yy :: 4aa$, $4bb$; e però l'equazione $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$.

E' anche proprietà primaria delle opposte iperbole, che

che lo ſteſſo rettangolo di $CD \times DB$, prendendo le aſſiſſe poſitive, e di $Bd \times dC$, prendendo le aſſiſſe negative, ſia al quadrato dell'ordinata sì poſitiva, che negativa, come l'aſſe, o diametro traſverſo al parametro; adunque chiamato eſſo parametro $= p$, ed il reſto come ſopra, ſarà $xx - aa, yy :: 2a, p$; cioè $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$, equazione ſempliciſſima, che eſprime intere le due oppoſte iperbole riferite al parametro, preſe le aſſiſſe dal centro; e preſe le aſſiſſe dal vertice C, ſarà l'equazione $\frac{2ayy}{p} = xx - 2ax$; e preſe finalmente le aſſiſſe dal vertice B, ſarà $2ax + xx = \frac{2ayy}{p}$.

Se le iperbole ſono equilatere, poichè in queſto caſo i due aſſi, o diametri ſono eguali tra loro, ed eguali al parametro, l'una e l'altra equazione ſarà $yy = xx - aa$, preſe le aſſiſſe dal centro; $yy = 2ax + xx$, preſe le aſſiſſe dal vertice B; ed $yy = -2ax + xx$, preſe le aſſiſſe dal vertice C. Per la quantità aa s'intenda un qualunque piano in qualſivoglia modo compleſſo, come pure per la quantità bb; e per $2a$, ſiccome pure per p s'intenda una qualunque linea, di modo che nell'equazione $\frac{\overline{aa + ff} \times yy}{b\sqrt{ab}} = xx - aa - ff$ ſarà $\sqrt{aa + ff}$ il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo, e $2\sqrt{aa + ff}$ tutto l'aſſe, o diametro traſverſo, ſiccome $\sqrt{b\sqrt{ab}}$ il ſemiaſſe, o ſemidia-

 metro

metro conjugato, e $2\sqrt{b\sqrt{ab}}$ tutto l'aſſe, o diametro conjugato; nell'equazione $\frac{a^3yy}{bbc} = xx - \frac{a^3}{c}$ ſarà $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo, e b il conjugato; nell'equazione $xx - bx = \frac{byy}{c+m}$ ſarà b il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo, e $c+m$ il parametro; nell'equazione $\frac{2yy\sqrt{aa-bb}}{a-b} = xx - aa + bb$ ſarà $2\sqrt{aa-bb}$ l'aſſe, o diametro traſverſo, $a-b$ il parametro ec.

Se le oppoſte iperbole foſſero diverſamente poſte, come nella *Fig.* 49., e ſullo ſteſſo diametro CB, eguale a $2a$, prodotto ſi voleſſero le x poſitive, e negative dal centro A (eſſendo $HE = 2b$), ſarebbe l'equazione $yy - bb = \frac{bbxx}{aa}$.

122. Nell'iperbola frà gl'aſintoti (*Fig.* 50.) il rettangolo di una qualunque AB preſa ſull'aſintoto bB nella BC ordinata parallela all'aſintoto MN, o di $Ab \times bc$, è ſempre coſtante, cioè eguale ad un rettangolo noto; e però fatta $AB = x$, $BC = y$, ed il noto rettangolo $= ab$, ſarà $xy = ab$, e preſa Ab negativa $= -x$, e bc negativa $= -y$, il rettangolo di $Ab \times bc$ ſarà pure xy, e però $xy = ab$ l'equazione ſempliciſſima delle oppoſte iperbole frà gl'aſintoti. E' chiaro, che l'equazione $-xy = ab$, o $xy = -ab$ ſervirà per le iperbole oppoſte negl'angoli BAM, bAN, eſſendo ſempre

una

una delle coordinate positiva, e l'altra negativa, e però il loro prodotto negativo.

123. Nell'Ellissi $CEBH$ (*Fig.* 51.) presa dal centro A una qualunque AD sull'asse o diametro trasverso CB, e condotta DM parallela all'asse o diametro conjugato EH, deve essere, per la nota proprietà, il rettangolo di $CD \times DB$ al quadrato di DM, come il quadrato dell'asse o diametro trasverso CB al quadrato del conjugato HE. Adunque chiamata $CB = 2a$, $HE = 2b$, e dal centro A presa una qualunque $AD = x$, e fatta DM positiva $= y$, DM negativa $= -y$, sarà $CD = a + x$, $DB = a - x$, e però $aa - xx, yy :: 4aa, 4bb$; cioè $\frac{aayy}{bb} = aa - xx$. E presa Ad negativa $= -x$, e le ordinate, come sopra, sarà $Bd = BA + Ad = a - x$, $dC = AC - Ad = a + x$, e però il rettangolo di $Bd \times dC$ sarà pure $aa - xx$, onde medesimamente avrassi $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, equazione semplicissima dell'ellissi, prese le assisse dal centro; e se si prenderanno le assisse dal vertice C, avrassi l'analogìa $2ax - xx, yy :: 4aa, 4bb$; e però l'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$.

E' anche proprietà nota dell'Ellissi, che gli stessi rettangoli sieno ai quadrati delle corrispondenti ordinate, come l'asse o diametro trasverso al parametro; adunque chiamato esso parametro $= p$, ed il rimanente come so-

pra, sarà $aa - xx$, $yy :: 2a$, p; e però $\frac{2ayy}{p} = aa - xx$, equazione semplicissima dell'ellissi riferita al parametro, prese le assisse dal centro; e prese le assisse dal vertice C, sarà l'equazione dell'ellissi riferita al parametro $\frac{2ayy}{p} = 2ax - xx$.

Se i due assi fossero eguali tra loro, nel qual caso sono anche eguali al parametro, l'una, e l'altra equazione sarebbe $yy = aa - xx$, prese le assisse dal centro, e $2ax - xx = yy$, prese le assisse dal punto C. Ma parlando di asse, e non di diametro, gl'angoli delle coordinate sono retti, quindi l'ellissi passa ad essere un circolo del raggio $= a$.

La osservazione fatta nelle iperbole intorno alle quantità date aa, bb, $2a$, e p, rispetto a' diametri, e parametro, si faccia egualmente nell'ellissi, senza altro ripetere le cose da se troppo chiare.

124. Nelle equazioni adunque dell'iperbole, e dell' ellissi riferite agl' assi, o diametri, prese le assisse dal centro, come

$$\frac{aayy}{bb} = xx - aa,$$

$$\frac{aayy}{bb} = aa - xx,$$

la radice quadrata del termine costante, cioè di aa, sarà sempre il semiasse, o semidiametro trasverso; e se il coefficiente del quadrato dell'ordinata è lo stesso termine costante

ſtante diviſo per una qualunque quantità data, la radice di queſto diviſore è ſempre il ſemiaſſe, o ſemidiametro conjugato, cioè la radice di bb; ma ſe eſſo coefficiente non è tale, vale a dire non contiene nel detto modo il termine coſtante, il ſemiaſſe o ſemidiametro conjugato è diverſo. Così nell' equazione, per eſempio, $\frac{ffyy}{bb} = xx - aa$ il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo è ſempre bensì a, ma non è b il conjugato. Per ritrovarlo ſi faccia l'analogìa: Come il numeratore del coefficiente del quadrato dell' ordinata al denominatore, così il termine coſtante al quarto, la di cui radice ſarà il ſemiaſſe, o ſemidiametro ricercato; nelle equazioni poi dell' elliſſi, e dell' iperbole riferite agl' aſſi, o diametri, preſe le aſſiſſe dal vertice, come $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$, $\frac{aayy}{bb} = xx - 2ax$, $\frac{aayy}{bb} = xx + 2ax$, ſarà il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo la metà della quantità, che moltiplica l'incognita alla prima dimenſione, ed il conjugato, come ſopra; avvertendo, che quando il coefficiente del quadrato dell' ordinata non ſia il quadrato dell' aſſe, o diametro traſverſo così ritrovato; l'analogìa per il ſemiaſse, o ſemidiametro conjugato ſarà: come il numeratore del coefficiente del quadrato dell' ordinata al denominatore, così il quadrato della metà della quantità, che moltiplica l'incognita alla prima dimenſione, al quarto; e la radice di eſso quarto propor-

zio-

zionale sarà il semiasse, o semidiametro conjugato.

Nell'equazione adunque dell'iperbola $\frac{ffyy}{bb} = xx - aa$ sarà il semiasse, o semidiametro trasverso $= a$, ed il conjugato $= \frac{ab}{f}$. Ed in fatti, poichè deve essere, per la proprietà della curva, il rettangolo della somma nella differenza del semiasse, o semidiametro trasverso, e dell' assissa al quadrato dell'ordinata, come il quadrato del asse, o diametro trasverso al quadrato del conjugato, sarà $xx - aa$, $yy :: 4aa$, $\frac{4aabb}{ff}$, o sia $\frac{4aayy}{4aabb} \times ff = xx - aa$, cioè $\frac{ffyy}{bb} = xx - aa$, equazione proposta.

Così nell'equazione $\frac{abyy}{cc} = aa - xx$ sarà il semiasse, o semidiametro trasverso $= a$, il conjugato $= \sqrt{\frac{acc}{b}}$. Nell' equazione $xx - 2ax = \frac{bbyy}{cm}$ sarà il semiasse, o semidiametro trasverso $= a$, il conjugato $= \frac{a\sqrt{cm}}{b}$. Nell'equazione $\frac{aa - bb}{cc} \times yy = xx - bb$ sarà il semiasse, o semidiametro trasverso $= b$, il conjugato $= \sqrt{\frac{bbcc}{aa - bb}}$ ec.

125. Se le equazioni sono riferite ai parametri, come $\frac{2ayy}{p} = aa - xx$, $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$, prese le assisse dal

dal centro, o

$$\frac{2ayy}{p} = 2ax - xx,\quad \frac{2ayy}{p} = 2ax + xx,\quad \frac{2ayy}{p} = xx - 2ax,$$

prese le assisse dal vertice; sarà sempre nelle prime il semiasse, o semidiametro trasverso la radice del termine costante, e nelle seconde la metà del coefficiente dell' incognita alla prima dimensione, ed il parametro sarà sempre la quantità del denominatore del coefficiente del quadrato dell'ordinata, quando il numeratore del detto coefficiente nelle prime sia il doppio della radice del termine costante, e nelle seconde sia eguale alla quantità, che moltiplica l'incognita alla prima dimensione; ma quando il detto numeratore non abbia le accennate condizioni, sarà il parametro la quarta proporzionale del numeratore, del denominatore, e dell'asse, o diametro trasverso.

Nell'equazione adunque all'ellissi $aa - xx = \frac{byy}{c}$ sarà l'asse, o diametro trasverso $= 2a$, il parametro $= \frac{2ac}{b}$. Ed in fatti, poichè deve essere, per la proprietà della curva, il rettangolo della somma nella differenza del semiasse, o semidiametro trasverso, e dell' assissa al quadrato dell'ordinata, come l'asse, o diametro trasverso al parametro, sarà $aa - xx,\ yy :: 2a,\ \frac{2ac}{b}$; cioè $\frac{byy}{c} = aa - xx$, l'equazione proposta. Nell' equazione $xx - aa = \frac{3yy}{4}$, all'

iperbola, sarà l'asse, o diametro trasverso $= 2a$, il parametro $= \frac{8a}{3}$. Nell' equazione all' iperbola $2ax + xx = \frac{\overline{b-c} \times yy}{m}$ sarà $2a$ l'asse, o diametro trasverso, e $\frac{2am}{b-c}$ il parametro. Nell'equazione all'ellissi $aa - bb - xx = \frac{byy}{c}$ sarà l'asse, o diametro trasverso $= 2\sqrt{aa-bb}$, il parametro $= \frac{2c\sqrt{aa-bb}}{b}$, supposta a maggiore di b, perchè altrimenti la curva sarebbe immaginaria.

126. Supposte, e bene intese queste tali cose, è facile la costruzione delle equazioni più complicate de' luoghi alle sezioni coniche, e ciò col ridurre l'equazione complicata ad una semplice e primaria delle spiegate, quindi, dalla sezione del cono supposta la descrizione di questa, passare alla costruzione della proposta.

E per procedere con chiarezza distinguerò in tre classi tutte le equazioni alle sezioni coniche, intendendo delle composte; dirò della prima classe tutte quelle, che contengono il quadrato di una sola delle incognite, ed il rettangolo delle costanti nell' altra incognita, come per esempio $ax \pm ab = yy$; ed altresì dirò della prima specie tutte quelle, che contengono i rettangoli delle incognite fra loro, e nelle costanti, ma non ânno il quadrato nè dell'una, nè dell'altra incognita; come $xy + ax = aa - ay$, essendo i segni comunque si vuole, il che s'intenda dell' altre due specie ancora rispetto ai segni. Della

Della seconda ſpecie chiamerò quelle, nelle quali eſſendo il quadrato di una, o di ambe le incognite, ed i rettangoli di una, o di ambe eſſe incognite nelle coſtanti, non vi ſia il rettangolo delle incognite fra loro, come $xx + 2ax = ay + by$, o pure $xx - 2bx = yy + ay - ax$.

Della terza ſpecie ſono quelle, nelle quali vi è il rettangolo delle due incognite tra loro, e gli altri termini in qualunque modo, come $xx + 2xy + 2yy = aa - xx + bx$.

127. Per riconoſcere, e coſtruire le equazioni della prima ſpecie, fa d'uopo mettere in uſo una ſoſtituzione, la quale è di porre l'incognita, che non â il quadrato, più o meno (ſecondo i ſegni) una coſtante, eguale ad una nuova incognita, e così ridurre l'equazione (replicando, ſe biſogna, la detta ſoſtituzione) all' eſpreſſione più ſemplice, acciò poſſa facilmente conoſcerſi, e coſtruirſi il luogo della detta equazione, come ſi vedrà nei ſeguenti Eſempj.

ESEMPIO I.

Sia $ax + ab = yy$, e ſia dato l'angolo, che fra loro devono fare le coordinate. Poichè $ax + ab$ è $a \times \overline{x + b}$, ſi faccia $x + b = z$, dunque ſoſtituendo ſarà $az = yy$, Parabola Apolloniana.

Alla indefinita AB, come diametro, col parametro $= a$ ſi deſcriva la parabola apolloniana CAC, (*Fig.* 52.) le di cui coordinate AB, BC comprendano il dato angolo, indi

ſia $AD=b$; preſa una qualunque $AB=z$, ſarà $BC=y$, ma perchè abbiamo, per la ſoſtituzione, $x=z-b$, ſarà DB la x. L'origine adunque delle aſſiſſe x ſarà il punto D, preſe verſo M le poſitive, verſo A le negative, e le corriſpondenti ordinate poſitive, e negative ſaranno le y.

Se l'equazione propoſta foſſe ſtata $ax-ab=yy$, s'avrebbe fatta la ſoſtituzione $x-b=z$, e però $x=z+b$. In queſto caſo, preſa nel diametro prodotto $AE=b$, e fatto il rimanente come ſopra, il punto E ſarebbe l'origine delle x.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $xy+ax=aa-ay$; ſi faccia $y+a=z$, e ſoſtituendo in luogo di y il valore $z-a$, avraſſi $zx+az==2aa$, e facendo un' altra ſoſtituzione di $x+a=p$, ſarà $pz=2aa$, Iperbola Apolloniana fra gli Aſintoti.

Comprendano le indefinite MM, FF l'angolo dato delle coordinate; (*Fig.* 53.) e fra gli aſintoti MM, FF ſi deſcrivano le due oppoſte iperbole del rettangolo coſtante $=2aa$. Preſa una qualunque $AC=p$, ed ordinata la CE parallela ad AM, ſarà eſſa $=z$, ma per la ſoſtituzione ſi â $x=p-a$, dunque fatta $AB=a$, ſarà $BC=x$; e perchè ſi â pure per l'altra ſoſtituzione $y=z-a$, fatta $AN=a$, e condotta NH parallela ad FF, ſarà $DE=y$. Tirata adunque BQ parallela ad AN, ſarà Q il principio delle x, coſicchè ad una qualunque aſſiſſa $QD=x$, corriſponderà l'ordinata $DE=y$ poſitiva tra il punto Q, ed il punto P, e negativa di

di là dal punto P, come la HI. Ma quando si prenda p minore di a, cioè AC minore di AB, allora comecchè $x = p - a$, sarà x negativa, cioè verso N, e ad essa corrisponderanno le ordinate y positive. Che se si prenda p negativa eguale, per esempio, ad AV, sarà x negativa, ed eguale a QO, e la y negativa $= OE$. Se l'equazione fosse $xy + ax = aa + ay$, o pure $xy + ax = - aa - ay$, o questa $xy - ax = aa - ay$, o l'altra $xy - ax = - aa + ay$, le due prime sarebbero divisibili per $y + a$, e si avrebbe $x = \pm a$; le due altre sarebbero divisibili per $y - a$, e si avrebbe $x = \mp a$, e però non sarebbero esse luoghi, ma equazioni di problemi determinati. Ma se fosse $xy - ax = aa + ay$, la prima sostituzione sarebbe $y - a = z$, quindi l'equazione $zx - az = 2aa$, ed in conseguenza la seconda sostituzione sarebbe $x - a = p$, onde finalmente l'equazione $zp = 2aa$, e però in questo caso alle coordinate p, z dovrebbesi aggiungere la quantità $= a$ per avere le x ed y; adunque presa da A verso V la $AR = a$, e fatta RG parallela ad MN, ed $= a$, indi per lo punto G condotta GT parallela ad FF, sarebbe G l'origine delle x, e le corrispondenti ordinate le y.

Se fosse l'equazione $xy + ax = - aa + ay$, le sostituzioni sarebbero $y + a = z$, $x - a = p$, che ci darebbero l'equazione $pz = - 2aa$.

Si descrivano le stesse iperbole, ma negli altri due angoli, per essere negativo il rettangolo costante $2aa$, e sieno le ie, ie; prodotta GR in L, sarà L l'origine delle x positive e negative, e sulla retta LQ prodotta d'ambe

le

le parti insisteranno le ordinate y, cioè negative da N verso H, positive da N al punto i, e di nuovo negative oltre il punto i.

Che se fosse $xy - ax = - aa - ay$, le sostituzioni sarebbero $y - a = z$, ed $x + a = p$. Descritte adunque le medesime iperbole ie, e prodotta QB in q, sarà q l'origine delle x, e sopra TT insisteranno le ordinate y.

Se nelle equazioni fosse negativo il termine xy, si renda positivo colla traspozione de' termini.

La diversità delle sostituzioni, e della posizione delle coordinate, che nasce dalla diversa combinazione de' segni nelle proposte equazioni, e che quì si è considerata, s'intenda di doversi considerare anche in appresso, il che ommetterò per brevità.

Sin quì ô supposto, che le costanti dell' equazione sieno tali, che diano luogo alle accennate sostituzioni, che se tali non fossero, come per esempio, se fosse l'equazione $aa - bx = yy$, si faccia $aa = bc$, e si avrà $bc - bx = yy$, e la sostituzione da farsi sarà $c - x$ eguale ad una nuova incognita. Così se fosse $\frac{abb + cx}{m} = yy$, si faccia $bb = cf$, onde sia l'equazione $\frac{acf + cx}{m} = yy$, e si ponga indi $\frac{af + x}{m}$ eguale ad una nuova incognita.

Se fosse $\frac{aax - bbx + m^3}{a + b} = yy$, si faccia $aa - bb = cc$, ed $m^3 = ccf$, e sarà $\frac{ccx + ccf}{a + b} = yy$; e così dell'altre simili.

128.

128. Per ridurre, e coſtruire le equazioni della ſeconda ſpecie; poſti da una parte del ſegno d'egualità col loro ordine tutti i termini, che contengono una ſteſſa incognita, e dall' altra parte tutti gli altri parimente col loro ordine, e fatto in modo, che nel primo membro dell' equazione il quadrato dell' incognita ſia poſitivo, e libero da' coefficienti, e frazioni, biſogna allo ſteſſo primo membro (ed al ſecondo ancora, per non alterare l'eguaglianza) aggiungere il quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine, ſe fa d'uopo, onde eſſo primo membro ſia un quadrato; quindi porre la radice di eſſo quadrato eguale ad una nuova incognita, la quale operazione ripetuta nel ſecondo membro ancora, ſe lo richiede, ci darà l'equazione ridotta alla forma ſempliciſſima, o ridotta alla prima ſpecie.

ESEMPIO III.

Sia $xx + 2ax = ay + by$. Aggiunto al primo, e ſecondo membro il quadrato aa, ſarà eſſa $xx + 2ax + aa = aa + ay + by$, e però ponendo $x + a = z$, averaſſi $zz = aa + ay + by$, che è ridotta alla prima ſpecie; adunque fatta $a + b = c$, ed $aa = cf$, ſarà $cf + cy = zz$, e poſta $f + y = p$, ſarà $zz = cp$, equazione alla Parabola Apolloniana.

Col parametro $= c = a + b$, al diametro AB, e con le coordinate nel dato angolo ſi deſcriva la parabola CAC. (*Fig.* 54.) Preſa una qualunque aſſiſſa $AB = p$, la z poſitiva e nega-

tiva

tiva sarà BC; ma perchè $y = p - f$, cioè $= p - \frac{aa}{a+b}$, presa $AD = \frac{aa}{a+b}$, sarà $DB = y$, ed a cagione della sostituzione $x + a = z$, dal punto D alzata parallela a BC la $DH = a$, che sarà terminata dalla parabola in H, (come si vedrà facilmente sostituendo in luogo della p nell' equazione ridotta $zz = cp$ il valore di $AD = \frac{aa}{a+b} = \frac{aa}{c}$, imperocchè sarà $zz = aa$, e però $DH = z = a$) e condotta per lo punto H la parallela OE al diametro, sarà $HE = DB = p - \frac{a^2}{a+b} = y$, ed in conseguenza $EC = z - a = x$ positiva, e negativa, quando sieno positive le assisse; ed alle assisse negative, cioè prese da H verso O, corrisponderanno ambe le ordinate negative.

ESEMPIO IV.

Sia $xx + 2bx = yy - ay$. Aggiunto il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè bb, sarà $xx + 2bx + bb = yy - ay + bb$, e fatta $x + b = z$, averassi $zz = yy - ay + bb$, cioè $zz - bb = yy - ay$, ed aggiunto il quadrato della metà di a, sarà $zz - bb + \frac{aa}{4} = yy - ay + \frac{aa}{4}$; posta dunque $y - \frac{a}{2} = p$, sarà $zz - bb + \frac{aa}{4} = pp$, e supposto bb maggiore di $\frac{aa}{4}$, facendo $bb - \frac{aa}{4} = mm$, sarà $zz - mm = pp$,

Iper-

Iperbola equilatera con i semidiametri $= m$, prendendo le assisse dal centro.

Nella indefinita BD si prenda $BG = 2m = 2\sqrt{bb - \frac{aa}{4}}$, e divisa egualmente in A; col centro A, col semidiametro trasverso $= AG$ eguale al conjugato, e con le coordinate nel dato angolo si descrivano le due opposte iperbole equilatere (*Fig.* 55.); presa una qualunque assissa AD positiva e negativa $= z$, le corrispondenti ordinate DH saranno le p positive, e negative, e perchè per la sostituzione si â $x = z - b$; presa $AE = b$, sarà $ED = x$, ma essendo per l'altra sostituzione $y = p + \frac{a}{2}$, dal punto E condotta $EO = \frac{a}{2}$ parallela all' ordinata, che terminerà alla curva nel punto O, e per lo punto O la indefinita KK parallela al diametro BG, sarà $KH = p + \frac{1}{2}a = y$. Sarà adunque il punto O l'origine delle x assisse sulla retta KK, alle quali prese positive corrispondono due ordinate y, una positiva, e l'altra negativa; e prese negative, ma non maggiori di EG, corrisponderanno due ordinate positive; prese negative e maggiori di EG, ma minori di EB, le ordinate y saranno immaginarie, e prese negative maggiori di EB, e minori di EI, fatta $BI = GE$, saranno due ordinate positive, e finalmente un'ordinata positiva, e negativa l'altra, quando l'assisse negative sieno maggiori di EI.

Quì devesi avvertire, che la radice del quadrato $yy - ay + \frac{aa}{4}$ non è solo $y - \frac{a}{2}$, ma è pure $\frac{a}{2} - y$, e però le

sostituzioni dovrebbero esser due, cioè tanto di $y-\frac{a}{2}=p$, quanto di $\frac{a}{2}-y=p$, ciò non ostante però, e nel presente esempio, ed in altri in appresso della prima sola mi servo, perchè considerandosi nelle costruzioni la nuova incognita p in senso e positivo, e negativo, vi sono comprese quelle determinazioni ancora, che ci darebbe l'altra sostituzione, che però rimane superflua.

Se la quantità bb, che ô supposta maggiore di $\frac{aa}{4}$, fosse all'opposto minore, il luogo sarebbe alle stesse opposte iperbole, mutandosi solo le veci delle coordinate, e delle costanti; cioè sarebbe l'equazione finale $zz=pp-mm$, la di cui costruzione quì si ommette, per non esser diversa dalla precedente, se non che i semidiametri sono in questo caso eguali ciascheduno alla $\sqrt{\frac{aa}{4}-bb}=m$. Se fosse poi $bb=\frac{aa}{4}$, il luogo sarebbe alla linea retta, come è chiaro.

129. Per riconoscere, e costruire le equazioni della terza specie; fa d'uopo, posto da una parte del segno d'egualità il quadrato di una delle incognite reso positivo, e libero da frazioni, e coefficienti con il rettangolo delle stesse, e dall'altra parte il rimanente de' termini, aggiungere al primo membro (e per conseguenza al secondo ancora) tale funzione dell'altra incognita, onde esso primo mem-

membro ſia un quadrato, indi porre la radice di eſſo eguale ad una nuova incognita, e fare la ſoſtituzione, con che averaſſi l'equazione ridotta all' eſpreſſione più ſemplice, o ad una delle due ſpecie di ſopra.

Così nell' equazione, per eſempio, $zz - \frac{2bzy}{a} = ay$ aggiungendo $\frac{bbyy}{aa}$ ad ambi i membri, ſarà il primo membro un quadrato, la di cui radice $z - \frac{by}{a}$ ſi ponga eguale ad una nuova incognita p, e fatta la ſoſtituzione, ſarà l'equazione $pp = \frac{bbyy}{aa} + ay$, che è della ſeconda ſpecie.

130. Ma deveſi avvertire, che alle volte queſta nuova incognita, che ſi vuole introdurre, deve eſſere affetta da qualche coefficiente coſtante, altrimenti ſarebbero molto imbrogliate le coſtruzioni, e però nell' equazione, per eſempio, $xx \pm \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = \pm fy \pm hx$, il di cui primo membro ſenz' altro aggiungere è già un quadrato, che â per radice $x \pm \frac{by}{a}$, ſe non vi foſſe il termine hx, o eſſendovi, ſi voleſſe eliminare eſſa x dall' equazione, col porre in luogo della x il ſuo valore cavato dalla ſoſtituzione fatta, di modo che foſſe eſpreſſa per la nuova incognita, e per la y con le coſtanti; ſi faccia pure la ſoſtituzione $x \pm \frac{by}{a} = z$.

Ma non essendovi il termine fy, o se essendovi si volesse eliminare la y, si deve fare la sostituzione $x \pm \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$. E così rispettivamente se l'equazione fosse $yy \pm \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \pm fy \pm hx$; non essendovi, o volendosi eliminare il termine fy, si faccia la sostituzione $y \pm \frac{bx}{a} = z$; ma non essendovi, o volendosi eliminare il termine hx, si faccia la sostituzione $y \pm \frac{bx}{a} = \frac{bz}{a}$.

Generalmente non essendovi nell'equazione il rettangolo delle costanti nell'incognita, per cui è stata ordinata l'equazione, o se essendovi si voglia essa incognita eliminare, si ponga la radice del primo membro eguale ad una nuova incognita. Ma non essendovi il rettangolo delle costanti nell'altra incognita, per cui non è stata ordinata l'equazione, o se essendovi si voglia eliminare essa incognita; si ponga la radice del primo membro eguale ad una nuova incognita moltiplicata nella metà del coefficiente costante del secondo termine del primo membro.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = cx$. Si faccia $y + \frac{bx}{a} = z$, e sarà l'equazione $zz = cx$ alla parabola apolloniana. Se l'angolo delle coordinate x, y della proposta equa-

equazione non fosse dato, ma fosse arbitrario, sarebbe chiara la costruzione del luogo; imperciocchè sulla retta indefinita AB descritto il triangolo isoscele ACD (*Fig.* 56.) colla base $CD = b$, ed i lati $AC = a = AD$; ed al diametro AB, col parametro $= c$, con le ordinate parallele a DC descritta la parabola apolloniana dell'equazione ridotta $zz = cx$; prendendo una qualunque assissa $AB = x$, sarebbe $BM = z$; ma per i triangoli simili ADC, ABE si â $EB = \frac{bx}{a}$, ed è, per la sostituzione fatta, $y = z - \frac{bx}{a} = EM$, e di più $AE = AB = x$; dunque sulla indefinita AE presa una qualunque assissa $AE = x$, la corrispondente ordinata EM positiva, e negativa sarà la y dell'equazione proposta.

Ma perchè si suppone dato l'angolo delle coordinate x, y, a nulla serve la suddetta costruzione, e però si proceda così: Sulla indefinita AB si descriva il triangolo ACP con l'angolo ACP eguale al supplemento del dato angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, e sia $AC = a$, $CP = b$. Prodotta AC indefinitamente, e presa una qualunque $AE = x$, sarà (fatta KK parallela a PC) $EH = \frac{bx}{a}$, quindi se HK fosse $= z$, sarebbe $EK = y$, ed AE, EK le coordinate x, y dell'equazione proposta, e nel dato angolo; ma le HK non possono essere le z dell'equazione ridotta $cx = zz$, quando non siano ancora le assisse AH eguali alla x, e non già le AE. Si avverta però che AH sarà $= \frac{AP \times x}{a}$, cioè $= \frac{fx}{a}$ (chia-

ma-

mata $AP = f$, giacchè nel triangolo ACP essendo dati il lato AC, il lato CP, e l'angolo ACP, è data pure la AP) onde la curva così descritta, chiamando $AE = x$, ed $HK = z$, ci darebbe l'equazione $\frac{cfx}{a} = zz$, la quale sarebbe appunto la nostra ridotta, se in luogo del parametro c si avesse descritta la curva col parametro $\frac{ac}{f}$. Adunque per costruire il luogo proposto; sulla indefinita AB si descriva il triangolo ACP coi lati $AC = a$, $CP = b$, e l'angolo ACP eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta; indi al diametro AB, col parametro $= \frac{ac}{f}$, cioè eguale alla quarta proporzionale di AP, di AC, e del parametro dell'equazione ridotta, (il che è generale qualunque volta il luogo è alla parabola) e con le ordinate parallele a PC si descriva la parabola apolloniana; presa sulla indefinita AE una qualunque $AE = x$, sarà EK positiva e negativa $= y$, e la curva il luogo dell'equazione proposta. Ed in fatti sarà $\overline{HK}^2$ eguale al prodotto del parametro in AH, cioè $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{acfx}{af} = cx$.

Si usi lo stesso artifizio nell'altre equazioni all'iperbola, ed all'ellissi rispetto ai loro diametri, e parametri; con la sola differenza, che in queste il diametro trasverso, o conjugato, secondo che quello, o questo si deve variare

re (e sarà sempre quello , a cui appartiene il triangolo ACP) sarà la quarta proporzionale di AC, di AP, e del diametro trasverso, o conjugato dell'equazione ridotta ; ma rispetto poi al parametro , quando per esso sia data l'equazione , variato il diametro trasverso nel modo detto, sarà esso la quarta proporzionale di AP, di AC, e del parametro dell'equazione ridotta; che se non al diametro trasverso, ma al conjugato appartenga il triangolo ACP (essendo data l'equazione per il parametro) sarà esso la terza proporzionale del parametro dell'equazione ridotta, e di AP, come facilmente si conoscerà dagli Esempj .

ESEMPIO VI.

Sia $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = bx - cc - 2cy$. Fatta la sostituzione di $y + \frac{bx}{a} = z$, sarà $zz = bx - cc - 2cz + \frac{2bcx}{a}$, cioè $zz + 2cz + cc = \frac{abx + 2bcx}{a}$, e fatta di nuovo l'altra sostituzione $z + c = q$, sarà finalmente $qq = \frac{\overline{ab + 2bc} \times x}{a}$, equazione alla parabola apolloniana. Ma per costruirla relativamente alle nostre coordinate x, y : sulla indefinita BH (*Fig.* 57.) si costruisca il triangolo BDC coi lati $BD = a$, $DC = b$, e con l'angolo BDC eguale al supplemento dell' angolo , che devono fare le coordinate x, y dell'equazione proposta; si producano BD , BC indefinitamente , dal punto

punto B si abbassi BA parallela a DC, ed eguale a c, indi col vertice A, al diametro AE parallelo a BC, e con le ordinate EP parallele a CD si descriva la parabola apolloniana PAP col parametro $= \frac{ab + 2bc}{f}$ (intendendo per f la nota BC), e sulla indefinita BF presa una qualunque assissa $BF = x$, sarà $BH = AE = \frac{fx}{a}$, ed $EP = q$, e però $HP = q - c = z$, ed $FH = \frac{bx}{a}$; adunque $FP = z - \frac{bx}{a} = y$ positiva, e negativa quando sia x maggiore di BO, ed ambe le ordinate negative quando sia x minore di BO.

Se nell'equazione proposta il rettangolo $2cy$ fosse stato affetto dal segno positivo, allora la seconda sostituzione sarebbe stata $z - c = q$, ed il parametro della parabola eguale ad $\frac{ab - 2bc}{a}$, e però fatte le stesse cose, come sopra, in vece di condurre BH al di sopra della AE, diametro, s'averebbe dovuto condurla al di sotto, e sopra di essa fare il triangolo BDC, come mostra la *Fig.* 58. Che se in oltre fosse stato negativo il termine $\frac{2bxy}{a}$, la prima sostituzione sarebbe stata $y - \frac{bx}{a} = z$, e però $y = z + \frac{bx}{a}$. Adunque in questo supposto sì rispetto alla *Fig.* 57., come alla 58. il triangolo BDC dovrà farsi al di sotto della BH, com'è BdC, quindi presa sopra Bd prodotta una qualunque $Bf = x$, sarà $fP = y$, avvertendo però, che in

questo

questo caso l'angolo BdC non dovrà farsi eguale al supplemento, ma allo stesso angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione.

ESEMPIO VII.

Sia $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = cx + ch$. Fatta la sostituzione $x + \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$, sarà $\frac{bbzz}{aa} = cx + ch$, e facendo $x + h = p$, sarà $zz = \frac{aacp}{bb}$, equazione alla parabola apolloniana. Sulla indefinita AC si descriva il triangolo APQ coi lati $AP = b$, $PQ = a$, e l'angolo APQ eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta (*Fig.* 59.), e si chiami al solito la nota $AQ = f$. Si producano AP, AQ indefinitamente, e si prenda $AH = h$, e si conduca HB parallela a PQ. Dal punto B si tiri BD indefinita e parallela ad AP, e col vertice A, al diametro AC, col parametro $= \frac{aac}{bf}$, e con le ordinate CM parallele a PQ si descriva la parabola MAM. Presa una qualunque $AE = p$, sarà $CM = z$, dunque HE, o sia BD, sarà $= x$, e $DC = \frac{ax}{b}$ (per i triangoli simili APQ, BDC) dunque $DM = z - \frac{ax}{b} = y$ positiva, e negativa, e le BD, DM le coordinate dell'equazione proposta.

Se l'equazione fosse stata $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = cx - ch$, fatta la stessa prima sostituzione dell'equazione antecedente, si averebbe $\frac{bbzz}{aa} = cx - ch$, e ponendo $x - h = p$, $zz = \frac{aacp}{bb}$, che è la stessa di prima, nè vi è altra differenza, se non che nel primo caso si â $x = p - h$, ed in questo $x = p + h$; vale a dire, che in questo caso il vertice della parabola deve essere in B, e l'origine delle x nel punto A prese sull'indefinita AE.

ESEMPIO VIII.

Sia $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = ch - cx$. Fatta la sostituzione $x + \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$, sarà l'equazione $\frac{bbzz}{aa} = ch - cx$, e posta $h - x = p$, sarà $zz = \frac{aacp}{bb}$, equazione alla parabola.

Sulla indefinita AH si descriva verso H il triangolo APQ coi lati $AP = b$, $PQ = a$, e l'angolo APQ eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta (*Fig.* 60.), e si chiami la nota $AQ = f$. Si produca AP, e si prenda $AE = h$, e s'abbassi EH parallela a PQ; col vertice H al diametro HA, con le ordinate CD parallele a PQ, e col parametro $= \frac{aac}{bf}$ si

de-

descriva la parabola apolloniana. Presa una qualunque $EB = p$, sarà $AB = b - p = x$, $BC = \frac{ax}{b}$, $CD = z$, dunque $BD = z - \frac{ax}{b} = y$ positiva, e negativa, prendendo x tra i punti A ed O, ed ambe le ordinate y negative, prendendo x oltre il punto O. Prodotta indefinitamente nella parte opposta al punto E la retta AE, e presa una qualunque $Eb = p$ positiva maggiore di AE, sarà $Ab = b - p = x$, quantità negativa, onde in questo caso le x negative saranno da A verso e, e le positive di A verso E, ed alla medesima x negativa corrisponderanno due ordinate bD, bD eguali ad y, positiva l'una, e negativa l'altra.

Se in questi due ultimi Esempj, siccome negl'altri, che verranno in appresso, il rettangolo delle due coordinate fosse affetto dal segno meno, vi si faccia sopra la considerazione, che si è fatta al fine dell'Esempio 6., il che basti d'avere una volta avvertito.

ESEMPIO IX.

Sia $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = xx - aa$. Fatta la sostituzione di $y - \frac{bx}{a} = z$, sarà l'equazione $zz = xx - aa$ all'iperbola. Sulla indefinita EE si descriva il triangolo ACH, e sia $AC = a$, $CH = b$, e l'angolo ACH eguale al dato angolo delle coordinate dell'equazione proposta. Si produca in-

definitamente AC d'ambe le parti del punto A. Col centro A, col semidiametro trasverso $AH = f$, col conjugato $= a$ si descrivano le opposte iperbole con le ordinate parallele a CH (*Fig.* 61.). Presa una qualunque $AB = x$ positiva, sarà $BE = \frac{bx}{a}$, ma $ED = z$, dunque $BD = z + \frac{bx}{a} = y$ positiva. Presa poi nell'iperbola l'ordinata z negativa, cioè $= EM$, sarà allora y eguale alla differenza tra EB, ed EM, cioè eguale a BM; e però negativa quando x sia maggiore di AO. Adunque ad una qualunque assissa positiva maggiore di AO corrisponderanno due ordinate, una positiva, negativa l'altra; ed ambe le ordinate saranno positive quando sia x minore di AO. Ma quando si prenda la x negativa, cioè dalla parte del punto Q; allora avvertasi, che sarà QE negativa, imperciocchè sarà l'analogia $AC\ (a)$, $CH\ (b) :: AQ\ (-x)$, $QE = -\frac{bx}{a}$, adunque se $QE = -\frac{bx}{a}$, presa z positiva $= ED$, sarà $z + \frac{bx}{a} = QD = y$ positiva, e presa z negativa, sarà $-z - \frac{bx}{a} = QM = y$ negativa.

ESEMPIO X.

Sia $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{gxx}{a} = bb$; aggiungendo $\frac{bbxx}{aa}$, sarà $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = bb - \frac{gxx}{a} + \frac{bbxx}{aa}$, e fatta la sostituzione

ne $y - \frac{bx}{a} = z$, sarà $zz = \frac{bbxx}{aa} - \frac{gxx}{a} + bb$, e ponendo $bb - ag = mm$, sarà $zz = \frac{mmxx}{aa} + bb$, cioè $zz - bb = \frac{mmxx}{aa}$, equazione all' iperbola.

Sulla indefinita DD si descriva il triangolo ABC coi lati $AB = a$, $BC = b$, e l'angolo ABC eguale all'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta (*Fig. 62.*), e sia $= f$ la nota AC. Per lo punto A si conduca l'indefinita PP parallela a BC; e col centro A, col diametro trasverso $QQ = 2b$, col conjugato $= \frac{2bf}{m}$ preso nella retta EE, ai vertici Q, Q si descrivano le due opposte iperbole HQH; presa una qualunque $AD = x$, e condotta DH parallela a BC, sarà $EH = z = AP$, e $DE = \frac{bx}{a}$; dunque $DH = z + \frac{bx}{a} = y$, e le AD, DH saranno le coordinate dell'equazione proposta.

ESEMPIO XI.

Sia $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{2bxx}{a} + bb$. Fatta la sostituzione di $y + \frac{bx}{a} = z$, sarà l'equazione $zz = \frac{2bxx}{a} + bb$, cioè $zz - bb = \frac{2bxx}{a}$, all' iperbola.

Sull'indefinita AD si descriva il triangolo AEP, (*Fig. 63.*) e sia $AE = a$, $EP = b$, e l'angolo AEP il sup-

ſupplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione propoſta. Prodotta d'ambe le parti indefinitamente la retta AE, e chiamata al ſolito la nota $AP = f$, ſi deſcrivano col centro A, col ſemidiametro traſverſo $AI = b$ parallelo a PE, e col parametro $= \frac{ff}{a}$ le oppoſte iperbole IC, ic; preſa una qualunque $AB = x$, ſarà $BD = \frac{bx}{a}$, ma $CD = FA = z$; dunque $BC = z - \frac{bx}{a} = y$. Preſa z negativa $= DG$ ſarà $BG = - z + \frac{bx}{a} = - y$, e però alla ſteſſa x poſitiva corriſponderanno due ordinate y, una poſitiva, l'altra negativa, preſa la x fra il punto A, ed il punto H; preſa poi la x fra i punti H, ed L, ſaranno ambe le ordinate y negative, e di nuovo una poſitiva, e negativa l'altra, preſa la x maggiore di AL.

Preſa poi la $Ab = - x$, ſarà $(bd) = - \frac{bx}{a}$, e però eſſendo $(dg) = z$, ſarà $(bg) = z - \frac{bx}{a} = y$, e preſa z negativa $= (dc)$, ſarà $(bc) = - z + \frac{bx}{a} = - y$; adunque alla ſteſſa $Ab = x$ negativa corriſponderanno due ordinate y, una poſitiva, l'altra negativa, preſa la x minore di Ah; ambe ſaranno le ordinate poſitive fra i punti h, ed l; e di nuovo un'ordinata ſarà poſitiva, e l'altra negativa, preſa la x maggiore di Al; e però le iperbole così deſcritte ſaranno il luogo della propoſta equazione.

ESEM-

ESEMPIO XII.

Sia $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = cc - xx + 2hx - hh$. Fatta la sostituzione $y - \frac{bx}{a} = z$, sarà $zz = cc - xx + 2hx - hh$, e fatta l'altra sostituzione $x - h = p$, sarà finalmente $zz = cc - pp$, equazione all'ellissi, e non al circolo, quantunque ne abbia l'apparenza, e la ragione si è, perchè non solo le coordinate p, z non formano angolo retto, ma nè meno sono in angolo tra loro, dovendo l'una essere AC, l'altra BT, come si vede nella costruzione, che segue; e però sulla indefinita EB si descriva il triangolo EDF (*Fig.* 64.) coi lati $ED = a$, $DF = b$, e l'angolo EDF eguale all'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, e si chiami $= f$ la nota EF. Si producano indefinitamente ED, EF, e presa $EP = h$, si conduca PA indefinita, e parallela a DF, e dal punto A la AG parallela ad EP. Col centro A, col diametro trasverso $MN = \frac{2cf}{a}$, col diametro conjugato RR parallelo a DF, ed $= 2c$ si descriva l'ellissi $MRNR$, presa una qualunque $AC = p$, sarà $EQ = x$, e però $BQ = \frac{bx}{a}$, ma $BT = z$, dunque $QT = z + \frac{bx}{a} = y$, e le EQ, QT le coordinate dell'equazione proposta.

ESEM-

ESEMPIO XIII.

Sia l'equazione $yy + \frac{bxy}{a} + xx + cy + lx - ag = 0$. Aggiunto all'uno, ed all'altro membro il quadrato $\frac{bbxx}{4aa}$, sarà $yy + \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} = \frac{bbxx}{4aa} - xx - lx - cy + ag$, e fatta la sostituzione $y + \frac{bx}{2a} = z$, sarà $zz = \frac{bbxx - 4aaxx}{4aa} + \frac{bcx - 2alx}{2a} - cz + ag$.

Sia per esempio $4aa$ maggiore di bb, e si ponga $\frac{bb - 4aa}{4aa} = -\frac{m}{n}$, e $\frac{bc - 2al}{2a} = h$, sarà, aggiunto ad ambi i membri $\frac{cc}{4}$, $zz + cz + \frac{cc}{4} = -\frac{mxx}{n} + hx + ag + \frac{cc}{4}$, e fatta la sostituzione $z + \frac{c}{2} = p$, sarà $pp = -\frac{mxx}{n} + hx + ag + \frac{cc}{4}$, cioè $-\frac{npp}{m} + \overline{\frac{cc}{4} + ag} \times \frac{n}{m} = xx - \frac{nhx}{m}$, ed aggiunto all'uno ed all'altro membro $\frac{nnhh}{4mm}$, sarà $-\frac{npp}{m} + \overline{\frac{cc}{4} + ag} \times \frac{n}{m} + \frac{nnhh}{4mm} = xx - \frac{nhx}{m} + \frac{nnhh}{4mm}$, e fatte finalmente le sostituzioni di $x - \frac{nh}{2m} = q$, e di $\overline{\frac{cc}{4} + ag} \times \frac{n}{m} + \frac{nnhh}{4mm} = ee$, si avrà $\frac{npp}{m} = ee - qq$, equazione all'ellissi.

Sulla indefinita AC si descriva il triangolo ASF, (*Fig.*

(*Fig.* 65.) e ſia $AS = 2a$, $SF = b$, e l'angolo ASF eguale al ſupplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione propoſta, e ſi chiami f la nota AF. Sulla AS indefinitamente prodotta preſa $AR = \frac{bn}{2m}$, ſi tiri RQ indefinita, e parallela ad SF, e dal punto Q ſi tiri l'indefinita QO, e parallela ad AS, e ſi faccia $QM = \frac{1}{2}c$, e per lo punto M condotta HV parallela ad AQ, col centro M, col diametro traſverſo $HV = \frac{ef}{a}$, col parametro $= \frac{4aem}{fn}$ ſi deſcriva l'elliſſi $HNVK$; preſa una qualunque $RD = q$, ſarà $PN = p$, e però $AD = x$, $DC = \frac{bx}{2a}$, $CN = z$, dunque $DN = z - \frac{bx}{2a} = y$.

Quì ſi noti, che ſe l'angolo delle coordinate foſſe tale, che l'angolo AFS diveniſſe retto, ed in conſeguenza l'angolo MPN ancora, allora ſarebbe $4aa - bb = ff$, onde $\frac{m}{n} = \frac{4aa - bb}{4aa} = \frac{ff}{4aa}$, e però ſarebbe il parametro $\frac{4aem}{fn} = \frac{ef}{a}$, cioè eguale al diametro traſverſo; adunque eſſendo di più retto l'angolo MPN, l'elliſſi paſſerebbe ad eſſere un circolo del diametro $\frac{ef}{a}$.

131. Riſpetto alle equazioni dell'iperbole, che ſi vogliano, o ſi debbano coſtruire fra gli aſintoti, ſi conſiderino tutte compreſe nelle quattro ſeguenti:

$$\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny.$$

ESEMPIO XIV.

Sia in primo luogo $\frac{gxx}{b} + xy = ab + mx + ny$, in cui prendo pure poſitivi tutti i termini dell'omogeneo di comparazione. Fatta la ſoſtituzione $\frac{gx}{b} + y = z$, averaſſi $zx = mx + nz - \frac{ngx}{b} + ab$, e fatta l'altra ſoſtituzione $z - m + \frac{ng}{b} = p$, ſarà $px = np + mn + ab - \frac{nng}{b}$, e di nuovo fatta la terza ſoſtituzione $x - n = q$, ſarà finalmente $pq = ab + nm - \frac{nng}{b}$. Suppongo, che ſia $ab + mn - \frac{nng}{b}$ quantità poſitiva. Sulla indefinita NN, al punto A preſo ad arbitrio ſi deſcriva il triangolo ABC coi lati $AB = b$, $BC = g$, e l'angolo ABC eguale al ſupplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione propoſta; e ſi chiami la nota $AC = f$. Al punto A ſi alzi AD parallela a BC, ed $= m - \frac{ng}{b}$, come nella *Fig.* 66. quando ſia $m - \frac{ng}{b}$ quan-

tità positiva; e si abbassi AD, come nella *Fig.* 67. quando sia $m - \frac{ng}{b}$ quantità negativa, a cagione della sostituzione fatta di $z - m + \frac{ng}{b} = p$. Per D si conduca PP indefinita, e parallela ad AC, e sulla AB prodotta si prenda $AE = n$, e per E si conduca TT parallela a BC. Fra gli asintoti PP, TT si descrivano le due opposte iperbole RR del rettangolo costante $= \overline{ab + mn - \frac{nng}{b}} \times \frac{f}{b}$, cioè il quarto proporzionale di AB, di AC, e del rettangolo costante dell'equazione ridotta; presa una qualunque $EQ = q$, sarà $PM = \frac{fq}{b}$, e $PR = p$, e però $AQ = q + n = x$; ma $PN = AD = m - \frac{ng}{b}$, dunque $NR = p + m - \frac{ng}{b} = z$, e perchè $QN = \frac{gx}{b}$, sarà finalmente $QR = z - \frac{gx}{b} = y$, e le due AQ, QR le coordinate dell'equazione proposta. Presa x positiva, quando sia minore di AE, sarà y negativa; quando sia maggiore di AE, e minore di AO, sarà y positiva; e quando sia maggiore di AO, sarà y negativa. Presa x negativa, allora sarà $QN = -\frac{gx}{b}$ quantità negativa, adunque $y = z - \frac{gx}{b}$ sarà $= NR + NQ$; e però quando x negativa sia minore di AO, sarà y negativa; e quando essa sia maggiore di AO, sarà la y positiva.

Ma se il secondo termine dell'omogeneo di compara-

zione fosse negativo, cioè se l'equazione fosse $\frac{gxx}{b} + xy = ab - mx + ny$, allora la seconda sostituzione sarebbe $z = p - m - \frac{ng}{b}$, e l'equazione ridotta $pq = ab - mn - \frac{nng}{b}$. Supposto adunque, che $ab - mn - \frac{nng}{b}$ sia quantità positiva, descritte come nella *Fig.* 67. le iperbole RR, ma del rettangolo costante $\overline{ab - mn - \frac{nng}{b}} \times \frac{f}{b}$, e presa $AD = m + \frac{ng}{b}$, saranno esse nello stesso modo il luogo dell' equazione proposta.

Se l'equazione proposta avesse l'ultimo termine affetto dal segno negativo; cioè se fosse $\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx - ny$, la terza sostituzione da farsi sarebbe $x + n = q$, dove che prima era $x - n = q$, e però muterassi la posizione del punto A, origine delle x. Adunque nella *Fig.* 68., se il valore di AD è positivo, e nella *Fig.* 69., se è negativo, prodotto in E il lato BA del solito triangolo, onde sia $AE = n$, si descrivano fra gli asintoti TT, PP le iperbole del loro competente rettangolo costante, cioè quando nell' equazione il termine mx è affetto dal segno positivo, del rettangolo costante $= \overline{ab - mn - \frac{nng}{b}} \times \frac{f}{b}$, e quando per l'opposto è affetto dal segno negativo, del rettangolo costante $= \overline{ab + mn - \frac{nng}{b}} \times \frac{f}{b}$, e presa nel primo caso $AD = m + \frac{ng}{b}$,

e nel secondo $AD = \frac{ng}{b} - m$, saranno nello stesso modo il luogo dell'equazione proposta.

Fino ad ora ô supposto, che il rettangolo costante dell'equazione ridotta sia quantità positiva; ma quando fosse quantità negativa, non sarebbe dissimile la costruzione, avvertendo solo di descrivere le iperbole negli altri due angoli relativamente al rettangolo costante, che darà l'equazione ridotta, prendendo la linea AD positiva, o negativa secondo il valore, che darà la stessa equazione, ed il punto A alla sinistra, o alla destra dell' asintoto TT conforme sarà positivo, o negativo l'ultimo termine ny dell' omogeneo di comparazione, come mostrano le *Figure* 66. 67. 68. e 69.

Il termine costante ab è stato preso fin' ora sempre positivo; ma quando anche si prenda negativo, nessuna alterazione può egli fare, se non rendere negativo il rettangolo costante delle equazioni ridotte, il qual caso già è stato costruito. Resta adunque generalmente costruita la prima delle quattro equazioni proposte, cioè $\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny$.

Quanto alla seconda equazione di sopra riferita $-\frac{gxx}{a} + xy = ab \pm mx \pm ny$; la prima sostituzione, che deve farsi, sarà $y - \frac{gx}{b} = z$, cioè $y = z + \frac{gx}{b}$, e tutto il rimanente si faccia, come si è fatto fin' ora.

Adun-

Adunque per avere l'ordinata y bisognerà alle z aggiungere la $\frac{gx}{b}$, onde in ciascun caso delle *Figure 66. 67. 68.* e *69.* si dovrà descrivere il triangolo ABC al di sotto della NN, come si vede in AbC, coi lati $Ab = b$, $bC = g$, e con l'angolo AbC eguale all'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, quindi prodotta dall'una, e dall'altra parte Ab, e presa una qualunque $Aq = x$, sarà la corrispondente qR la y.

Le due ultime equazioni delle quattro sono

$$\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

ma mutando i segni saranno esse

$$-\frac{gxx}{b} + xy = -ab \mp mx \mp ny,$$

$$\frac{gxx}{b} + xy = -ab \mp mx \mp ny;$$ ma questa è stata

costruita nel costruire la prima, e l'altra è stata costruita nel costruire la seconda, e però generalmente sono state costruite le quattro equazioni da prima proposte; il che era da farsi.

PRO-

PROBLEMA I.

132. *Data di posizione la retta indefinita* AB, (Fig. 70.) *e dato fuori di essa il punto* F; *si ricerca il luogo di tutti i punti* M *tali, che condotte da ciascuno di essi due rette linee, l'una perpendicolare alla* AB, *l'altra al dato punto* F, *sieno queste sempre eguali fra loro.*

Sia M uno dei punti, che si cercano, e si tirino le rette, MN perpendicolare a BA, ed MF al dato punto F; dovranno essere queste eguali fra loro, per la condizione del problema, e però condotta FG normale ad AB, e chiamata $= a$, si tiri ad essa perpendicolare MP, e si chiami $GP = x$, $PM = y$, sarà $PF = a - x$, e però $FM =$ $= \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, ma $FM = MN$; dunque $x =$ $= \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, cioè $xx = xx - 2ax + aa + yy$, o sia $2ax - aa = yy$, e fatta la sostituzione $x - \frac{a}{2} = z$, sarà $2az = yy$, equazione alla parabola apolloniana.

Si prenda GL eguale alla metà di GF, e col vertice L, col parametro $= 2a$ si descriva la parabola LM, sarà essa il luogo cercato, in cui presa una qualunque $LP = z$, sarà $PM = y$; ma $GL = \frac{1}{2}a$, dunque $GP = z + \frac{a}{2} = x$, e però le GP, PM le coordinate dell'equazione proposta.

Già si sa, per la proprietà della parabola, che AB è la direttrice, ed F il fuoco.

PRO-

PROBLEMA II.

133. *Data di posizione una retta linea indefinita* PAP, *e dati due punti fissi* A, D, *l'uno sulla stessa linea, e l'altro fuori di essa* (Fig. 71.), *si domanda il luogo di tutti i punti* M *tali, che condotte le linee* MA *al dato punto* A, *e* DME *dal dato punto* D *per lo punto* M, *sia sempre* AM *eguale alla porzione* ME *compresa fra il punto* M, *ed il punto* E, *in cui essa linea* DME *incontra la data linea* PAP.

Dal dato punto D, e dal punto M, che si suppone essere uno di quelli, che si cercano, si tirino le linee DB, MP perpendicolari alla data PAP; saranno note le rette AB, BD, e però sia $AB=2a$, $BD=2b$, $AP=x$, $PM=y$. Si tirino le rette AM, DME; poichè per la condizione del problema $AM=ME$, sarà ancora $PE=AP=x$; ora per i triangoli simili EBD, EPM sarà $EB, BD :: EP, PM$, e sostituendo i valori analitici, $2x-2a, 2b :: x, y$; e però l'equazione $2xy-2ay=2bx$, cioè $xy-ay=bx$. Si faccia la sostituzione $x-a=z$, sarà $zy=bz+ba$, e trasportando il termine bz, $zy-bz=ab$, e fatta l'altra sostituzione $y-b=p$, sarà finalmente $pz=ab$, equazione all'iperbola fra gli asintoti.

Sulla data linea di posizione PAP dal dato punto A si prenda $AL=a$, e si erigga ad essa perpendicolare la $LC=b$; indi condotta per lo punto C la retta RF parallela

lela a PP; si descrivano fra gli asintoti RF, HG le due opposte iperbole DM, AM del rettangolo ab, le quali passeranno per i punti D, A; presa una qualunque $CK=z$, sarà $KM=p$, ma $AL=a$, $LC=b$; dunque $AP=a+z=x$, e $PM=p+b=y$ saranno le coordinate del problema, e le iperbole il luogo, che si cercava; il che ec.

PROBLEMA III.

134. *Dati due circoli* EGF, BNO, *e dati i loro centri* C, A; (Fig. 72.) *se da un qualunque punto* G *della periferìa del circolo* EGF *si tirerà una tangente* GNO, *che incontri ne' puuti* N, O *l'altro circolo* BNO, *e da questi due punti si condurranno due tangenti* NM, OM, *si ricerca il luogo di tutti i punti* M, *ne' quali le dette tangenti s' incontrano*.

Dal punto M, che è uno di quelli, che si cercano, si tiri la perpendicolare MP alla CA, e dal centro A si tiri la retta AM; poichè i triangoli ANM, AOM sono eguali, per essere retti gli angoli N, O, ed i lati AN, NM eguali ai lati AO, OM; sarà anche l'angolo $NMA=OMA$, onde nei triangoli NMQ, OMQ, poichè è comune il lato MQ, ed $MO=MN$, sarà $NQ=QO$, ed AM perpendicolare alla NO. Si tiri dal centro C al punto del contatto la retta CG, la quale sarà parallela ad AM, essendo anch' essa perpendicolare alla NO; e si chiami $AB=a$, $CE=b$, $CA=c$, ed $AP=x$, $PM=y$,

e però $AM = \sqrt{xx + yy}$. Nei triangoli simili AOM, AQO sarà AM, $AO :: AO$, AQ, e sostituiti i valori analitici, si troverà $AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}$. Si conduca CH perpendicolare ad MA prodotta, se farà bisogno, sarà $HQ = CG$, e però $HA = b - \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}$; ma saranno simili i triangoli CAH, AMP, dunque PA, $AM :: AH$, AC, cioè x, $\sqrt{xx + yy} :: b - \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}$, c, e moltiplicati gli estremi, ed i mezzi, $cx = b\sqrt{xx + yy} - aa$, ovvero $cx + aa = b\sqrt{xx + yy}$, e quadrando, $ccxx + 2aacx + a^4 = bbxx + bbyy$, cioè $yy + \frac{bb - cc}{bb} \times xx - \frac{2aacx}{bb} - \frac{a^4}{bb} = 0$.

Tre casi in quest'equazione debbono distinguersi, cioè quando $b = c$; quando b è maggiore di c; e quando c è maggiore di b.

Sia primieramente $b = c$, sarà l'equazione $yy - \frac{2aax}{b} - \frac{a^4}{bb} = 0$. Si lasci solo da una parte il termine yy, e sarà $yy = \frac{2aax}{b} + \frac{a^4}{bb}$, e ritrovato un rettangolo $2bf = aa$, si ponga in luogo di aa nell'ultimo termine del secondo membro, sarà $yy = \frac{2aax + 2aaf}{b}$, e fatta la sostituzione $x + f = z$, sarà finalmente $yy = \frac{2aaz}{b}$, equa-

zio-

zione alla parabola apolloniana. Sulla retta CA (*Fig.* 73.) verſo C ſi prenda $AI = \frac{aa}{2b} = f$, e col vertice I, aſſe IL, parametro $= \frac{2aa}{b}$ ſi deſcriva la parabola IM; ſarà eſſa il luogo cercato, in cui preſa una qualunque $IP = z$, ſarà $PM = y$, ma $AI = f$, dunque $AP = z - f = x$, e le AP, PM le coordinate del Problema.

Sia in ſecondo luogo b maggiore di c, ſarà poſitivo il termine $\frac{\overline{bb - cc} \times xx}{bb}$; ſi ſcriva l'equazione così $\frac{\overline{bb-cc} \times xx}{bb} - \frac{2aacx}{bb} = \frac{a^4}{bb} - yy$, ovvero $xx - \frac{2aacx}{bb-cc} = \frac{a^4}{bb-cc} - \frac{bbyy}{bb-cc}$, ed aggiunto ad ambi i membri il quadrato $\frac{a^4cc}{\overline{bb-cc}^2}$, ſarà $xx - \frac{2aacx}{bb-cc} + \frac{a^4cc}{\overline{bb-cc}^2} = \frac{a^4bb}{\overline{bb-cc}^2} - \frac{bbyy}{bb-cc}$, e fatta la ſoſtituzione $x - \frac{aac}{bb-cc} = z$, ſarà finalmente $\frac{bbyy}{bb-cc} = \frac{a^4bb}{\overline{bb-cc}^2} - zz$, equazione all'elliſſi.

Si prenda (*Fig.* 74.) dal punto A verſo E la porzione $AI = \frac{aac}{bb-cc}$, e col centro I, coll'aſſe traſverſo $ZY = \frac{2aab}{bb-cc}$, col conjugato $RT = \frac{2aa}{\sqrt{bb-cc}}$ ſi deſcriva l'elliſſi $RZTY$, ſarà eſſa il luogo cercato, in cui preſa una qualun-

que $IP = -z$ (perchè dalla parte de' negativi), sarà $PM = y$; ma $AI = \frac{aac}{bb - cc}$, dunque $AP = z + \frac{aac}{bb - cc} = x$, e però le AP, PM le coordinate del Problema, il che ec.

Sia finalmente c maggiore di b, sarà negativa la quantità $\frac{\overline{bb - cc} \times xx}{bb}$, e però l'equazione $\frac{ccxx - bbxx + 2aacx}{bb} = yy - \frac{a^4}{bb}$, ovvero $xx + \frac{2aacx}{cc - bb} = \frac{bbyy}{cc - bb} - \frac{a^4}{cc - bb}$. Si aggiunga ad ambi i membri il quadrato $\frac{a^4 cc}{\overline{cc - bb}^2}$, e sarà $xx + \frac{2aacx}{cc - bb} + \frac{a^4 cc}{\overline{cc - bb}^2} = \frac{bbyy}{cc - bb} + \frac{a^4 bb}{\overline{cc - bb}^2}$, e fatta la sostituzione $z = x + \frac{aac}{cc - bb}$, sarà finalmente $zz - \frac{a^4 bb}{\overline{cc - bb}^2} = \frac{bbyy}{cc - bb}$, equazione all'iperbola riferita agl' assi.

Sulla retta CA (*Fig.* 75.) si prenda dalla parte del punto C la porzione $AI = \frac{aac}{cc - bb}$, e col centro I, coll'asse trasverso $ZY = \frac{2aab}{cc - bb}$, col conjugato $= \frac{2aa}{\sqrt{cc - bb}}$ si descrivano le iperbole opposte YM, ZK; saranno esse il luogo cercato, in cui presa una qualunque $IP = z$, sarà $PM = y$; ma $AI = \frac{aac}{cc - bb}$, dunque $AP = z - \frac{aac}{cc - bb} = x$, e però le AP, PM le coordinate del problema proposto, il che ec.

In

In questo Problema si è sempre supposto il circolo *EFG* maggiore del circolo *BNO*, cioè b maggiore di a, ma quando anche fosse $b = a$, ovvero a maggiore di b, il luogo dei punti cercati sarebbe sempre nel primo caso la parabola, nel secondo l'ellissi, e nel terzo le due opposte iperbole, e perciò era inutile il distinguere questi casi, i quali non fanno variare i luoghi.

PROBLEMA IV.

135. *Date due linee* AC, CB *di posizione sulla retta* AB, *che si taglino in* C (Fig. 76. 77.), *si ricerca il luogo di tutti i punti* M *tali, che condotta per essi una perpendicolare* PMN *ad* AB, *che tagli nel punto* Q *la* AC, *e nel punto* N *la* BC, *sia sempre il quadrato di* PM *eguale al rettangolo di* $PQ \times PN$.

Si tiri la retta *CD*; questa o caderà fra i punti *A*, *B*, come nella *Figura* 76., o caderà da una parte di essi, come nella *Figura* 77.

Cada in primo luogo fra i punti *A*, *B*, e si chiami $AB = a$, $AP = u$, $PQ = x$, $PM = y$, $PN = z$, sarà, per la condizione del problema, $zx = yy$. Ma è data la ragione di *AP* a *PQ*, che sia, per esempio, quella di m ad n, ed è data la ragione di *BP*, a *PN*, che sia, per esempio, come b, c; dunque sarà $PQ = x = \frac{un}{m}$, e $PN = z = \frac{ac - cu}{b}$, e però sostituiti questi valori nell' equazione $zx = yy$, sarà

$yy =$

$yy=\frac{\overline{ac-cu}}{b}\times\frac{un}{m}$, cioè $\frac{bmyy}{cn}=au-uu$, equazione all'elliſſi. Coll' aſſe traſverſo $AB=a$, col conjugato $=a\sqrt{\frac{cn}{bm}}$ ſi deſcriva l'elliſſi AMB, ſarà la metà ſuperiore $AMCB$ il luogo, che ſi cerca.

Cada ora (*Fig.* 77.) il punto D da una parte dei punti A, B, e chiamata, come ſopra, $AB=a$, $AP=u$, $PM=y$, $PQ=x$, $PN=z$, ſarà $BP=u-a$, e però $PN=\frac{uc-ac}{b}$; ma, per la condizione del problema, $zy=yy$, e la $x=\frac{un}{m}$, come ſopra, dunque fatta la ſoſtituzione dei valori di z, ed x, ſarà $yy=\frac{\overline{uc-ac}}{b}\times\frac{un}{m}$, o ſia $\frac{bmyy}{cn}=uu-au$, equazione all' iperbola.

Al vertice B, aſſe traſverſo $=a$, aſſe conjugato $=a\sqrt{\frac{cn}{bm}}$ ſi deſcriva l'iperbola BCM, ſarà eſſa il luogo, che ſi cercava.

Se la retta AC non cadeſſe ſopra la AB, ma foſſe a lei parallela, come ſarebbe nella poſizione aC, AB, (*Fig.* 78.) ſarebbe data la retta PQ, e però chiamata $PQ=m$, $AB=a$, $BP=u$, $PN=z$, $PM=y$, e fatta la ragione di BP, $PN :: m, n$, l'equazione $xz=yy$ ſarebbe $yy=un$; onde deſcritta al vertice B, aſſe BA, col parametro $=n$ la parabola apolloniana BMC, ſarà eſſa in queſto caſo il luogo, che ſi cerca.

PRO-

PROBLEMA V.

136. *Sia una curva* AM (Fig. 79.), *di cui ſia data l'equazione, ed abbia per aſſe la retta* AT, *e ſia fuori di eſſa un punto fiſſo* F, *da cui ſia condotta la retta* FM, *che tagli la curva nel punto* M, *e l'aſſe nel punto* P. *Movendoſi la retta* FM *intorno al punto* F *faccia movere tutto il piano* AMP *parallelo a ſe ſteſſo ſulla linea* ET, *eſſendo fiſſo il punto* P *riſpetto al punto* A, *ma mobile ſull' aſſe* TA, *cioè eſſendo data* AP; *deſcriverà nello ſteſſo tempo il punto* M *una curva* CMD: *ſi cerca, quale ſia queſta curva.*

Sia giunta la curva ſul punto a della retta ET, ſarà per la condizione del problema $Pp = Aa$, e però $AP = (ap)$. Si chiami adunque $AP = a$, $FT = b$, ed abbaſſata dal punto M la perpendicolare MQ ad ET; ſia $TQ = x$, $QM = y$, $AQ = t$. Poichè per i triangoli ſimili FOM, PMQ ſi â FO, $OM :: QM$, PQ, cioè $b + y$, $x :: y$, $\frac{xy}{b+y}$, ſarà $\frac{xy}{b+y} = PQ$, ma $PQ = a - t$, dunque $\frac{xy}{b+y} = a - t$, cioè $xy = ab - bt + ay - ty$.

Si ſoſtituiſca in queſt' equazione canonica il valore di t dato per la y, e per le cognite dell'equazione della curva AM, e ſi avrà l'equazione, che ſi cerca della curva CMD.

Sia

Sia primieramente AM una retta linea (*Fig.* 80.); sarà data la ragione di t ad y, che sia, per esempio, come m ad n, sarà $t = \frac{my}{n}$, e sostituito questo valore in luogo di t nell' equazione canonica, sarà essa $\frac{myy}{n} = ab - xy - \frac{bmy}{n} + ay$, luogo all' iperbola fra gli asintoti.

Per costruirla nella data *Figura* si prenda sulla FO una qualunque porzione TH, e condotta in angolo retto la HG tale, che sia TH, $HG :: n, m$; si tiri la TG, e presa sulla TA la porzione $TV = \frac{an - bm}{n}$, dal punto V si tiri VS parallela a TG, e fra gli asintoti VS, VE si descriva l'iperbola CMD del rettangolo costante $= \frac{abg}{n}$; (fatta $= g$ la nota TG) presa una qualunque affissa $TQ = x$, sarà la corrispondente $QM = y$, e l'iperbola il luogo dell' equazione $\frac{myy}{n}$, il che ec.

Sia in secondo luogo AM un circolo (*Fig.* 81.) descritto col centro P, raggio $AP = a$, sarà per la proprietà del circolo $AQ = t = a - \sqrt{aa - yy}$, e sostituito nell' equazione generale in luogo di t questo valore, sarà essa $xy = b + y\sqrt{aa - yy}$, equazione alla Concoide di Nicomede, e sarà la curva CMD, che si descrive dall' intersezione M della retta FM coll' arco superiore AM del circolo, la concoide superiore, ET ne sarà l'asintoto, F il polo;

polo; e la curva, che si genera dall'interſezione N della retta FM col circolo al di ſotto di ET, ſarà la concoide inferiore. Il che manifeſtamente ſi vede dalla natura della concoide, e dalla condizione del problema; imperciocchè ſaranno ſempre le due intercette PM, PN fra l'aſintoto, e la curva eguali al raggio del circolo AP.

Sia in terzo luogo la curva AM una parabola apolloniana del parametro $AP = a$; (*Fig.* 82.) ſarà in queſt'ipoteſi $t = \frac{yy}{m}$, e ſoſtituito nell'equazione canonica queſto valore di t, ſarà eſſa

$$xy - ay + \frac{y^3}{m} = ab - \frac{byy}{m},$$

cioè

$$y^3 + mxy + byy - amy - abm = 0.$$

Che è l'equazione alle due Concoidi Paraboliche, una delle quali ſi deſcrive per l'interſezione della linea FM colla parte ſuperiore della parabola; l'altra per l'interſezione colla parte inferiore, e la retta ET ſarà anche in queſto caſo l'aſintoto della curva.

PROBLEMA VI.

137. *Dati due circoli eguali, che ſi taglino in due punti* A, N; (Fig. 83.) *e dati i loro centri* D, B, *ſi ricerca il luogo di tutti i punti* M *tali, che le loro diſtanze dai detti circoli ſieno ſempre eguali fra loro.*

Sia M uno dei punti, che si cercano; condotte dai centri D, B per questo punto le rette DM, BO, saranno MS, MO le distanze dai circoli dati, le quali per la condizione del problema devono essere fra loro eguali. Si chiami adunque $DS = BO = a$, $DB = b$, ed abbassata la perpendicolare MP alla retta DB prodotta, sia $DP = x$, $PM = y$, sarà $DM = \sqrt{xx + yy}$, ed $SM = \sqrt{xx + yy} - a$, ma $BP = x - b$, dunque $BM = \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, e però $OM = a - \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, ma deve essere $SM = MO$, dunque si avrà l'equazione $\sqrt{xx + yy} - a = a - \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, la quale si riduce ad essere (coi metodi insegnati) $xx - bx + \frac{bb}{4} = aa - \frac{4aayy}{4aa - bb}$, si faccia la sostituzione $x - \frac{b}{2} = z$, e sarà $zz = aa - \frac{4aayy}{4aa - bb}$, o sia $\frac{4aayy}{4aa - bb} = aa - zz$, equazione all'ellissi.

Si divida per metà nel punto C la retta DB, e col centro C, coll'asse trasverso $FE = 2a$, col conjugato $AN = \sqrt{4aa - bb}$ si descriva l'ellissi $FAEN$, sarà essa il luogo cercato, in cui presa una qualunque $CP = z$, sarà $PM = y$, ma $CD = \frac{1}{2}b$, dunque $DP = z + \frac{1}{2}b = x$, e però le DP, PM le coordinate del problema proposto.

E' inutile il distinguere i casi, ne' quali a è maggiore, minore, o eguale a b, perchè il problema non muta natura, essendo sempre necessariamente b minore di $2a$, come è chiaro.

Dalla costruzione si ricava, che i punti D, B saranno i fuochi dell'ellissi, e che il di lei asse conjugato sarà terminato dai punti, ne' quali si tagliano i due circoli. E primieramente, perchè DS è eguale a BO, ed $SM = MO$, sarà $DS + SM + MB$, cioè $DM + MB = 2DS$, ma $2DS = FE$, dunque per la nota proprietà dell'ellissi saranno i punti B, D i di lei fuochi. Ciò supposto, per un'altra proprietà dell' ellissi riguardo ai fuochi, intendendo condotte le BA, BN, sarà $BN = BA = CE$, ma questo si verifica nei punti, nei quali si tagliano i due circoli dati, perchè D, B sono i loro centri, e CE per la costruzione è eguale al semidiametro degli stessi circoli, dunque l'ellissi passerà per i detti punti d'intersezione dei circoli dati, il che ec.

PROBLEMA VII.

138. *Data la retta linea* AB (Fig. 84.), *ritrovare il luogo de' punti* D *tali, che nella prodotta* DA *presa* AC *metà di* AD, *e condotta al punto* B *la retta* CB, *sia* CB=CD.

Si abbassi dal punto D, che si suppone essere uno di quelli, che si cercano, la normale DP alla AB. E si chiami $AB = a$, $AP = x$, $PD = y$, sarà $AD = \sqrt{xx + yy}$, ed AC per la condizione del problema $= \frac{1}{2}\sqrt{xx + yy}$, e però $CD = CB = \frac{3}{2}\sqrt{xx + yy}$; si tiri dal punto C la per-

pendicolare CQ alla BA prodotta; poichè ne' triangoli simili AQC, APD è $AD = 2AC$, sarà $AP = 2AQ$, e $PD = 2QC$, onde $CQ = \frac{1}{2}y$, ed $AQ = \frac{1}{2}x$, e però $BQ = a + \frac{1}{2}x$; ora $\overline{CB}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{BQ}^2 = aa + ax + \frac{xx}{4} + \frac{yy}{4}$, ma $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 = \frac{9}{4} \times \overline{xx + yy}$, dunque sarà l'equazione $\frac{9xx}{4} + \frac{9yy}{4} = aa + ax + \frac{xx}{4} + \frac{yy}{4}$, che si riduce ad essere $xx - \frac{ax}{2} = \frac{aa - yy}{2}$, ed aggiunto ad ambi i membri il quadrato $\frac{aa}{16}$, e fatta la sostituzione $x - \frac{a}{4} = z$, sarà finalmente $zz = \frac{9aa}{16} - yy$, equazione al circolo.

Si prenda adunque $BM = \frac{3a}{4}$, e col centro M, col raggio BM si descriva il circolo NDB, sarà esso il luogo, che si cercava, in cui presa una qualunque $MP = z$, sarà $PD = y$, ma $AM = \frac{1}{4}a$, dunque $AP = z + \frac{1}{4}a = x$, e le AP, PD le coordinate del problema proposto.

Se si volesse anche il luogo de' punti C, questo sarebbe un'altro problema di simile natura, che si scioglierebbe nella seguente maniera.

Si chiami $AQ = p$, $QC = q$ normale a BN, sarà $AP = 2p$, $PD = 2q$, ma $AM = \frac{a}{4}$, ed $MB = \frac{3a}{4}$, dunque $NA = \frac{a}{2}$, e però $NP \times PB = \frac{aa}{2} + ap - 4pp$, ma per la

pro-

proprietà del circolo $NP \times PB = \overline{PD}^2 = 4qq$, dunque sarà $4qq = \frac{aa}{2} + ap - 4pp$, quindi $\frac{aa}{8} - qq = pp - \frac{ap}{4}$, si aggiunga ad ambi i membri il quadrato $\frac{aa}{64}$, e fatta la sostituzione $p - \frac{a}{8} = t$, sarà $qq = \frac{9aa}{64} - tt$, onde descritto col diametro $MN = \frac{3a}{4}$ il semicircolo NCM, sarà esso il luogo di tutti i punti C, in cui presa dal centro S una qualunque $SQ = t$, sarà $QC = q$, ma $AS = \frac{a}{8}$, per la costruzione, dunque $AQ = t + \frac{a}{8} = p$, e le AQ, QC le coordinate del problema.

Questi due Problemi si potranno dimostrare unitamente in forma di Teorema nel seguente modo.

Se nella data AB si prenderà MB eguale a tre quarti di AB, e col centro M, col raggio MB si descriverà il circolo NDB, ed in oltre col diametro MN il circolo NCM, condotta per lo punto A, comunque si voglia, la retta linea CD terminata alla periferia dell' uno, e dell' altro circolo, e dal punto C la retta CB all' estremità del diametro, sarà sempre DA doppia di AC, e CD eguale a CB.

Sia S il centro del circolo NCM, e si conducano le rette SC, DL per i centri S, M. Poichè SM è la metà di MB, sarà SM tre ottavi di AB; ma AM ne è un

quar-

quarto, dunque SA sarà un'ottavo di AB, e però la metà di AM; ma è pure SC la metà di DM, e l'angolo SAC eguale all'angolo DAM, dunque è facile da vedersi, che sarà il triangolo SAC simile al triangolo DAM, e sarà però anche AC la metà di AD, che era il primo.

Ma se sono simili i triangoli SAC, ADM, sarà anche l'angolo SCA eguale all'angolo ADM, onde saranno parallele le rette linee SC, DL, ed in conseguenza simili i triangoli BLM, BCS, e però sarà ML la quarta proporzionale di BS, SC, ed MB; ma $BS = \frac{9}{8} AB$, $SC = \frac{3}{8} AB$, $MB = \frac{6}{8} AB$, dunque $ML = \frac{2}{8} AB = AM$, ma $MD = MB$, e l'angolo $AMD = LMB$, dunque sono eguali i triangoli AMD, BML, e l'angolo $ADM = MBL$; ma è anche l'angolo MDB eguale all'angolo MBD, dunque l'angolo CDB è eguale all'angolo CBD, e però il lato CB eguale al lato CD, che era il secondo.

PROBLEMA VIII.

139. *Dati i due lati* AC, CB *della norma* ACB, (Fig. 85.) *si ricerca il luogo di tutti i punti, per i quali passa l'estremità* B *del lato* CB *mentre la norma si move talmente, che il punto* A *sia sempre sulla linea* DM, *ed il punto* C *sulla linea* DP, *che si suppone perpendicolare alla* DM.

Dal

Dal punto B si abbassi BP normale a DP, e sia $DP = x$, $PB = y$, $AC = a$, $CB = b$; sarà $CP = \sqrt{bb - yy}$, $DC = x - \sqrt{bb - yy}$. Ma gli angoli DCA, BCP presi assieme sono eguali ad un retto, siccome gli angoli BCP, CBP, e però eguali fra loro gli angoli DCA, CBP; dunque saranno simili i triangoli ADC, BCP, e sarà $AC, CD :: BC, BP$, cioè $a, x - \sqrt{bb - yy} :: b, y$; e però $ay = bx - b\sqrt{bb - yy}$, e quadrando, ed ordinando i termini, sarà l'equazione $xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} = bb - yy$. Si faccia la sostituzione $x - \frac{ay}{b} = z$, ed averassi l'equazione $zz = bb - yy$ all'ellissi.

Sull'indefinita DM si descriva il triangolo DEH coi lati $DE = b$, $EH = a$, e l'angolo DEH retto, giacchè è retto l'angolo delle coordinate del Problema, e sia $= f$ la nota DH. Col semidiametro trasverso $DH = f$, col semidiametro conjugato $DQ = b$, e parallelo ad EH si descriva l'ellissi HBQ, essa sarà il luogo ricercato, in cui presa una qualunque $DF = PB = y$, sarà $GB = z$, $FG = \frac{ay}{b}$, dunque $FB = z + \frac{ay}{b} = x = DP$; e però le DP, PB le coordinate del Problema.

PRO-

PROBLEMA IX.

140. *Dato l'angolo* BAP, *e dato il punto* P; (Fig.86.) *si ricerca il luogo di tutti i punti* D *tali, che condotte le due rette*, BD *parallela ad* AP, *e* DP *al dato punto* P, *sia sempre* BD *a* DP *nella data ragione di* d *ad* e.

Condotta DC parallela ad AB, si chiami $AP = a$, $AC = x$, $CD = y$, $CP = a - x$. Poichè l'angolo BAP, o sia DCE è dato, condotta DE normale ad AP; sarà data la ragione di CD alla CE, e però sia $CD, CE :: d, b$. Sarà adunque $CE = \frac{by}{d}$, $AE = x + \frac{by}{d}$, $EP = a - x - \frac{by}{d}$, o pure $= x + \frac{by}{d} - a$, $PD = \frac{ex}{d}$. Adunque sarà $\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{DP}^2 - \overline{PE}^2$, cioè $yy = \frac{eexx}{dd} - aa - xx + 2ax + \frac{2aby}{d} - \frac{2bxy}{d}$, o sia $yy + \frac{2bxy}{d} + \frac{bbxx}{dd} = \frac{\overline{ee + bb - dd}}{dd} \times xx + 2ax - aa + \frac{2aby}{d}$, (aggiungendo all'uno, ed all'altro membro la quantità $\frac{bbxx}{dd}$). Ma quì si osservi, che la quantità $ee + bb - dd$ può essere eguale, maggiore, o minore del zero; e però sia in primo luogo eguale al zero, adunque sarà l'equazione $yy + \frac{2bxy}{d} + \frac{bbxx}{dd} = \frac{2aby}{d} + 2ax - aa$, e facendo

la

la sostituzione $y + \frac{bx}{d} = z$, sarà $zz - \frac{2abz}{d} = 2ax - \frac{2abbx}{dd} - aa$, ed aggiunto ad ambe le parti $\frac{aabb}{dd}$, $zz - \frac{2abz}{d} + \frac{aabb}{dd} = 2ax - \frac{2abbx}{dd} + \frac{aabb - aadd}{dd}$, e facendo la sostituzione $z - \frac{ab}{d} = p$, sarà $pp = \frac{2addx - 2abbx + aabb - aadd}{dd}$, cioè $pp = \overline{x - \frac{a}{2}} \times \overline{\frac{2add - 2abb}{dd}}$, e fatto $x - \frac{a}{2} = q$, sarà $pp = q \times \overline{\frac{2add - 2abb}{dd}}$. Parabola Apolloniana.

Sia (*Fig.* 87.) BAP il dato angolo, AP la data $= a$. Sulla AP indefinitamente prodotta si descriva il triangolo AMN con l'angolo $AMN = BAP$; e sia AM, $MN :: d$, b. Si produca AN indefinitamente, e nella AB sia $AH = \frac{ab}{d}$, e si conduca HE indefinita, e parallela ad AN. Si divida AP per metà in O, e condotta OQ parallela ad AB, col vertice Q, al diametro QE, col parametro $= \frac{2add - 2abb}{df}$, (fatta $f = AN$) e con le ordinate parallele ad AB si descriva la parabola QD; presa una qualunque $AV = x$, sarà $VD = y$, ed essa parabola il luogo cercato.

Sia in secondo luogo $ee + bb - dd$ maggiore del zero, cioè quantità positiva. Ripresa adunque l'equazio-

Ee ne,

ne, e fatta $ee + bb - dd = hh$, sarà $yy + \frac{2bxy}{d} + \frac{bbxx}{dd} = \frac{hhxx}{dd} - aa + 2ax + \frac{2aby}{d}$, e fatta la stessa sostituzione di $y + \frac{bx}{d} = z$, sarà $zz - \frac{2abz}{d} = \frac{hhxx}{dd} - aa + 2ax - \frac{2abbx}{dd}$, ed aggiunto $\frac{aabb}{dd}$, e fatta la sostituzione $z - \frac{ab}{d} = p$, $ddpp = hhxx + 2addx - 2abbx - aadd + aabb$, cioè $xx + \frac{2addx - 2abbx}{hh} = \frac{ddpp}{hh} + \frac{aadd - aabb}{hh}$. Si faccia $\frac{add - abb}{hh} = m$, sarà $xx + 2mx = \frac{ddpp}{hh} + am$, ed aggiungendo all'uno ed all'altro membro mm, $xx + 2mx + mm = \frac{ddpp}{hh} + am + mm$, e fatto $x + m = q$, sarà finalmente $qq = \frac{ddpp}{hh} + am + mm$, cioè $qq - am - mm = \frac{ddpp}{hh}$, equazione all'iperbola.

Sia BAP (*Fig.* 88.) il dato angolo, AP la data $= a$, sulla AP indefinitamente prodotta si descriva il triangolo AMN coll'angolo $AMN = BAP$; e sia AM ad $MN :: d, b$. Si produca indefinitamente AN, e nella AB si prenda $AH = \frac{ab}{d}$, e per lo punto H si tiri l'indefinita OE parallela ad AN; indi si faccia $AK = m$, e si tiri KO parallela ad AH; ed al centro O, col semidiametro trasverso $OQ = \frac{f\sqrt{am + mm}}{d}$, col semidiametro conjuga-

jugato $= \frac{b\sqrt{am + mm}}{d}$, e parallelo ad AB (intendendo per f la nota AN) si descriva l'iperbola QD; presa una qualunque $AV = x$, sarà $VD = y$, ed essa iperbola il luogo ricercato.

Sia finalmente $ee + bb - dd$ minore del zero, cioè nagativa; si faccia adunque $ee + bb - dd = -hh$, e fatto $y + \frac{b}{d}x = z$, l'equazione sarà $zz - \frac{2abz}{d} = -\frac{hhxx}{dd} - aa + 2ax - \frac{2abbx}{dd}$, ed aggiungendo $\frac{aabb}{dd}$, $zz - \frac{2abz}{d} + \frac{aabb}{dd} = -\frac{hhxx}{dd} + \frac{2addx - 2abbx}{dd} + \frac{aabb - aadd}{dd}$, e fatta la sostituzione $z - \frac{ab}{d} = p$, $ddpp = -hhxx + 2addx - 2abbx + aabb - aadd$, cioè $xx - \frac{2addx + 2abbx}{bb} = \frac{aabb - aadd}{bb} - \frac{ddpp}{bb}$. Si faccia $\frac{add - abb}{bb} = m$, avremo $xx - 2mx = -am - \frac{ddpp}{bb}$, ed aggiunto mm, $xx - 2mx + mm = mm - am - \frac{ddpp}{bb}$; e fatta finalmente la sostituzione $x - m = q$, sarà $\frac{ddpp}{bb} = mm - am - qq$, equazione all'ellissi.

Sia (*Fig.* 89.) BAP il dato angolo, ed AP la data $= a$. Sulla AP indefinitamente prodotta si descriva il triangolo AMN coll'angolo $AMN = BAP$, e sia AM ad MN :: d, b; si produca AN indefinitamente, e nella

AB si prenda $AH = \frac{ab}{d}$, e per lo punto H si tiri la HE indefinita, e parallela alla AN. Sulla AP prodotta si prenda $AK = m$, che in questo caso è sempre maggiore di $AP = a$, e si tiri KO parallela ad AB. Al centro O, col semidiametro trasverso $OQ = \frac{f\sqrt{mm - am}}{d}$ (fatta $AN = f$) col semidiametro conjugato $= \frac{h\sqrt{mm - am}}{d}$, e parallelo ad AH si descriva l'ellissi QD; presa una qualunque $AV = x$, sarà $VD = y$, ed essa il luogo ricercato.

141. Ho detto, che AK (m) è maggiore di AP (a); intorno a ciò cade in proposito lo spiegare, come di due quantità complesse possa conoscersi, quale sia la maggiore. Si instituisca adunque fra loro un rapporto di maggioranza, o di minorità, come più piace, indi si proceda, come nelle equazioni, trasportando, dividendo ec., e facendo altre operazioni fin a tanto, che si arrivi ad una conseguenza nota, la quale se è vera o assolutamente, o ipoteticamente, sarà assolutamente, o ipoteticamente vero il rapporto instituito, e se è falsa, questo pure sarà falso. Vogliasi adunque sapere se m, cioè $\frac{add - abb}{dd - bb - ee}$ sia maggiore di a. Si faccia il rapporto $\frac{add - abb}{dd - bb - ee} > a$, e riducendo al comune denominatore, $add - abb > add - abb - aee$, e cancellando i termini, che si elidono, sarà $0 > -aee$;

ma

ma è veriſſimo, che il zero è maggiore di quantità negativa, dunque è vero, che $\frac{add-abb}{dd-bb-ee}$ è maggiore di a.

Così volendo ſapere ſe $aa+2ab$ ſia maggiore di bb, ſi faccia $aa+2ab > bb$, ed aggiungendo all'uno ed all' altro membro il quadrato bb, ſarà $aa+2ab+bb > 2bb$, e cavando la radice, $a+b > \sqrt{2bb}$, o ſia $a > \sqrt{2bb}-b$, ma poichè ſono date le quantità a, b, potraſſi ſempre ſapere, ſe a ſia, o non ſia maggiore di $\sqrt{2bb}-b$, ed in caſo che lo ſia, ſarà anche $aa+2ab$ maggiore di bb. La maniera è la ſteſſa ne' caſi più compoſti, e però non occorre parlarne più lungamente.

PROBLEMA X.

142. *Date di poſizione due rette* VB, VE (Fig. 90.) *e dato il punto* P, *ſopra cui, come polo, s'aggiri la retta* PE, *ritrovare il luogo de' punti* D *tali, che ſia ſempre* CD *alla* DE *in ragione data*.

Si conduca VP, e parallele ad eſſa le rette AD, BE, e ſia la ragione di CD a DE, o pure di CD ad EC, come d ad e, ed eſſendo dati gli angoli EVB, EBV, ſia EB a BV, come e ad b.

Si chiami $VP=a$, $VA=x$, $AD=y$, ſarà $EB=\frac{ev}{d}$,

e

e però $VB = \frac{hy}{d}$. Per la similitudine de' triangoli CVP, CDA sarà $DA, PV :: CA, CV$, e componendo, $DA + PV, PV :: AV, CV$, cioè $a + y, a :: x, CV$, e però $CV = \frac{ax}{a+y}$, e per la similitudine de' triangoli PVC, EBC sarà $PV, VC :: EB, BC$, cioè $a, \frac{ax}{a+y} :: \frac{ey}{d}, BC$, onde $BC = \frac{exy}{ad + dy}$, e però l'equazione $BC + CV = BV$, cioè $\frac{exy + adx}{ad + dy} = \frac{hy}{d}$, o sia $yy - \frac{exy}{b} = \frac{adx}{b} - ay$.

Per costruirla si ponga $y - \frac{ex}{b} = \frac{ez}{b}$, sostituendo sarà $\frac{ezy}{b} = - ay - \frac{adz}{b} + \frac{ady}{e}$, cioè $zy + \frac{ahy}{e} - \frac{adhy}{ee} = - \frac{adz}{e}$.

Si ponga in oltre $z + \frac{ah}{e} - \frac{adh}{ee} = p$, sarà adunque $py = \frac{aadh}{ee} - \frac{aaddh}{e^3} - \frac{adp}{e}$, e fatta la terza sostituzione $y + \frac{ad}{e} = q$, sarà finalmente $pq = \frac{aaedh - aaddh}{e^3}$, iperbola fra gli asintoti, il di cui rettangolo costante è positivo, perchè la e sarà sempre maggiore della d.

Si produca PV indefinitamente, e si prenda $VQ = \frac{ad}{e}$; dal punto Q si tiri l'indefinita QS parallela ad VB, e preso un qualunque punto M nella retta PH, e condotta MN parallela ad VB, per la similitudine de' triangoli

VMN,

VMN, EBV, sarà $VM, MN :: e, h$. Si faccia $VI = \frac{aeh - adh}{ee}$, e per lo punto I condotta indefinita la retta RIK parallela ad VE, fra gli asintoti RS, RK si descriva l'iperbola OVD del rettangolo costante $= \frac{aaedh - aaddh}{e^3} \times \frac{f}{e}$ (chiamata f la nota VN) la quale necessariamente passerà per lo punto V. Presa una qualunque $VH = y$, sarà $HD = x$, cioè $VA = x$, $AD = y$, e la curva così descritta il luogo de' punti D; il che ec.

143. Ricavando l'equazione dalla proprietà delle curve descritte sì negli addotti esempj, come ne' problemi, deve essa essere la stessa dell' equazione proposta da costruirsi quando le operazioni sieno giuste, e ciò può servire per dimostrazione del metodo, il che a bello studio ô tralasciato di fare, per non recare troppo di noja. Tuttavia però, per darne brevemente un picciol saggio, prendo le costruzioni dell'Esempio 13., e del Problema 8.

E quanto all'Esempio. Posta (*Fig.* 65.) $AD = x$, ed essendo $AS = 2a$, $AF = f$, sarà $AC = \frac{fx}{2a}$, e poichè $AR = \frac{hn}{2m}$, sarà $AQ = \frac{hfn}{4am}$, e però $QC = \frac{fx}{2a} - \frac{hfn}{4am} = MP$; adunque essendo il semidiametro $HM = \frac{ef}{2a}$, averassi $HP = \frac{ef + fx}{2a} - \frac{hfn}{4am}$, e $PV = \frac{ef}{2a} - \frac{fx}{2a} + \frac{hfn}{4am}$. Così poichè $DN = y$, $CD = \frac{bx}{2a}$,

CP

$CP = QM = \frac{1}{2}c$, sarà $PN = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Ma, per la proprietà dell' ellissi, deve essere $HP \times PV$, $\overline{PN}^2 :: HV$ al parametro, che è $= \frac{4aem}{fn}$, dunque si avrà l'equazione

$\overline{\frac{eeff - ffxx}{4aa} + \frac{ffhnx}{4aam} - \frac{ffhhnm}{16aamm}} \times \frac{4aam}{ffn} = \frac{cc}{4} + \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} + cy + \frac{bxy}{a} + yy$, cioè $\frac{mee - mxx}{n} + hx - \frac{hhn}{4m} = \frac{cc}{4} + \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} + cy + \frac{bxy}{a} + yy$, e restituito in luogo di ee il suo valore $\frac{ccmn + 4agmn + nnhh}{4mm}$, sarà $\frac{cc}{4} + ag - \frac{mxx}{n} + hx = \frac{cc}{4} + \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} + cy + \frac{bxy}{a} + yy$, e finalmente restituendo i valori di $-\frac{m}{n} = \frac{bb - 4aa}{4aa}$, e di $h = \frac{bc - 2al}{2a}$, si avrà $ag - xx - lx = cy + \frac{bxy}{a} + yy$, che è appunto l'equazione proposta da costruirsi.

Nella costruzione dell'ultimo Problema (*Fig. 90.*), essendo $\overline{\frac{aaedh - aaddh}{e^3} \times \frac{f}{e}}$ il rettangolo costante dell' iperbola, ed $VI = \frac{aeh - adh}{ee}$, e parallela all'asintoto RS, sarà $RI = \frac{adf}{ee}$; ma per la similitudine de' triangoli VMN, VHG, è $VM, VN :: VH, VG$, e però $VG = \frac{fy}{e} = IK$, adun-

adunque $RK = \frac{adf}{ee} + \frac{fy}{e}$; ma $HG = \frac{by}{e}$, $GK = VI = \frac{aeb - adb}{ee}$, quindi $HK = \frac{bey + aeb - adb}{ee}$; ma $HD = VA = x$, dunque sarà $KD = \frac{bey + aeb - adb - eex}{ee}$, e perchè, per la proprietà della curva, deve essere il rettangolo di $RK \times KD$ eguale al rettangolo costante, dunque

$$\frac{adf + efy}{ee} \times \frac{bey + aeb - adb - eex}{ee} = \frac{aaedb - aaddb}{e^3} \times \frac{f}{e},$$

cioè $yy - \frac{exy}{b} + ay - \frac{adx}{b} = 0$, come doveva essere.

Fatta la stessa diligenza ad ogni Esempio, e Problema, si troverà essere giusto il metodo.



CAPO IV.

Delle Equazioni, e de' Problemi solidi.

144. RAdice di una qualunque equazione si chiama ciascuna di quelle quantità, che sostituite nell'equazione in luogo di quella lettera, secondo cui l'equazione stessa è ordinata, cioè in luogo di quella, che fa figura d'incognita, fanno svanire tutti i termini; ovvero (ciò che è lo stesso) radice d'un'equazione è ciascuno de' valori dell'incognita, o della lettera, che fa figura d'incognita nell'equazione.

Le radici adunque dell'equazione $xx - ax + bx - ab = 0$ saranno due, una a, l'altra $-b$, perchè ciascuna di queste sostituita in luogo di x fa svanire i termini dell'equazione; o perchè sì a, come $-b$ sono i valori della lettera x nell'equazione proposta. Le radici dell'equazione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$ saranno 1, 2, 3, -5; perchè appunto ciascuno di questi numeri sostituito in luogo della x fa svanire tutti i termini, o perchè ciascuno di questi numeri è un valore della incognita x. Le radici dell'equazione $x^4 \begin{matrix} - bbxx \\ - aabb \end{matrix} - a^4 = 0$ saranno $+\sqrt{-aa}$, $-\sqrt{-aa}$, $+\sqrt{aa+bb}$, $-\sqrt{aa+bb}$, e così dell'altre tutte.

145. In altro ſenſo ancora ſogliono prenderſi le radici d'un'equazione, cioè ſottraendo dall'incognita ad uno ad uno i valori poſitivi, ed aggiungendo i negativi, e paragonandoli al zero, onde in queſto ſenſo le radici dell'equazione $xx - ax + bx - ab = 0$ ſaranno $x - a = 0$, $x + b = 0$. Dell'equazione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$ ſaranno $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 5 = 0$, e così dell'altre, ed in queſto ſenſo diceſi, che ogni equazione è il prodotto delle ſue radici, perchè tra loro moltiplicate formano appunto l'equazione, di cui ſono eſſe le radici; quindi è, che tante ſaranno le radici delle equazioni, compreſe le immaginarie, quanto è il grado loro, e però due ſaranno le radici dell'equazione quadratica, tre della cubica, quattro di quella del quarto grado ec.

Si moltiplichi $x + a = 0$ in $x + b = 0$, naſcerà l'equazione quadratica (I.)

$$\begin{array}{l} xx + ax + ab = 0 \\ + bx \end{array}$$

queſta di nuovo ſi moltiplichi in $x - c = 0$, e naſcerà l'equazione del terzo grado (II.)

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + axx + abx - abc \\ + bxx - acx \\ - cxx - bcx \end{array}\right\} = 0$$

e queſta di nuovo ſi moltiplichi in $x + d = 0$, e ſarà l'equazione del quarto grado (III.)

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + abxx - abcx - abcd \\ + bx^3 - acxx + abdx \\ - cx^3 - bcxx - acdx \\ + dx^3 + adxx - bcdx \\ + bdxx \\ - cdxx \end{array}\right\} = 0$$

Si moltiplichi $x + \sqrt{ab} = 0$ in $x - \sqrt{ab} = 0$, ſarà $xx - ab = 0$,

e questa si moltiplichi in $x + c = 0$, sarà $x^3 + cxx - abx - abc = 0$, e di nuovo si moltiplichi in $x + c = 0$, sarà

$$x^4 + 2cx^3 - abxx - 2abcx - abcc = 0$$
$$+ ccxx$$

Si moltiplichi $x + \sqrt{-ab} = 0$ in $x - \sqrt{-ab} = 0$ in $x + a = 0$, sarà $x^3 + axx + abx + aab = 0$.

146. Se adunque si averà modo di sapere, quali sieno i valori o tutti, o alcuni dell'incognita dell'equazione, si potrà sempre essa dividere per tante equazioni semplici, quanti sono i valori noti, aggiungendo all'incognita i valori negativi, e sottraendone i positivi. Quindi l'equazione prima è divisibile per $x + a$, e per $x + b$; la seconda per $x + a$, $x + b$, $x - c$; la terza per $x + a$, $x + b$, $x - c$, $x + d$ ec.; con che si riducono le equazioni composte in tante semplici, quante sono le radici, se tutte sono note, e si abbassano di tanto grado, quanto è il numero delle note, se non lo sono tutte; e però l'equazione, per esempio, del quinto grado si ridurrà al quarto, se si sappia una delle sue radici; al terzo quando se ne sappiano due ec.

147. Dal modo, con cui nascono le equazioni (che s'intenderanno sempre ridotte al zero, e nelle quali il massimo termine rispetto all'incognita, o rispetto a quella lettera, secondo cui sono ordinate, sia positivo, e libero da' coefficienti) è facile il riconoscere, che il coefficiente dell'incognita, o sia della lettera, secondo cui è ordinata l'equazione, nel secondo termine è la somma di tutte le ra-

radici dell'equazione affette dal ſegno contrario; il coefficiente del terzo termine è la ſomma di tutti gli ambj, che ſi poſſono fare da eſſe radici; il coefficiente del quarto la ſomma di tutti i terni, e così di mano in mano fino all' ultimo termine coſtante, che è il prodotto di tutte le radici fra loro.

148. Da ciò s'inferiſce, che la ſomma delle radici poſitive dovrà neceſſariamente eſſere eguale alla ſomma delle negative in tutte quelle equazioni, nelle quali manca il ſecondo termine; e che la ſomma delle poſitive ſarà maggiore della ſomma delle negative, quando il ſecondo termine ſia affetto dal ſegno negativo, ed all' oppoſto, quando eſſo ſia affetto dal ſegno poſitivo.

149. Mancando nell'equazione un qualche termine, ſi ſuole nel luogo del termine mancante ſcrivere un'aſteriſco, come $x^4 * + aaxx - b^3x + a^4 = 0$ ſe manca il ſecondo termine; $x^4 - ax^3 * - b^3x + a^4 = 0$ ſe manca il terzo, e così degli altri.

150. Se l'equazione non avrà termine alcuno affetto da quantità immaginaria, le radici ſue ſaranno o tutte reali, o avendone delle immaginarie, ſaranno eſſe in numero pari, ed eguali a due a due, con la ſola diverſità, che una ſarà poſitiva, e l'altra negativa; imperciocchè eſſendo il ſecondo termine la ſomma di tutte le radici, ſe l'equazione â il ſecondo termine, quando le radici immaginarie non ſi diſtruggano a due a due coi ſegni contrarj, in eſſo coefficiente vi ſarà neceſſariamente qualche immagi-

gi-

ginario contro il ſuppoſto ; ſe poi manca il ſecondo termine, appunto egli non può mancare, ſe non quando la ſomma delle radici poſitive ſia eguale alla ſomma delle negative, e per conſeguenza ancora la ſomma delle immaginarie poſitive eguale alla ſomma delle immaginarie negative, cioè ſe non quando eſſe ſi diſtruggano nel modo ſuddetto. Le equazioni adunque di grado diſpari averanno neceſſariamente una radice per lo meno reale, e quelle di grado pari potranno averle tutte immaginarie. Medeſimamente ſi diſcorra, per la ſteſſa ragione, delle radici ſorde ; vale a dire, che ſe l'equazione non averà termini ſordi, o irrazionali, le di lei radici o ſaranno tutte razionali, o le irrazionali ſaranno di numero pari a due a due eguali, ma con ſegno contrario.

151. Vi ſono delle equazioni, che ânno tutte le radici poſitive, dell'altre, che le ânno tutte negative, e dell'altre, che ne ânno e delle poſitive, e delle negative, ſiccome ve ne ſono di quelle, che le ânno tutte immaginarie, altre tutte reali, altre finalmente, che ne ânno e delle reali, e delle immaginarie. Diverſe regole ſi danno dagli Scrittori d'Algebra, per conoſcere in una qualunque data equazione il numero delle radici poſitive e negative, delle reali, e delle immaginarie ; ma perchè queſte regole, e le loro dimoſtrazioni ſono aſſai compoſte e proliſſe, e di pochiſſimo uſo, da me ſi tralaſciano, baſtando il ſapere ; primo, che ſe tutte le radici ſono negative, ſaranno poſitivi tutti i termini dell'equazione, imperciocchè eſ-

ſen-

sendo positivi in questo caso tutti i termini delle equazioni semplici, cioè delle radici prese nel secondo significato (num. 145.), dalle quali s'intende generata la proposta, saranno altresì positivi tutti i prodotti; secondo, che se tutte le radici sono positive, i termini dell'equazione saranno alternativamente positivi, e negativi, poichè il primo termine, come si suppone, già sarà sempre positivo; il secondo termine, poichè contiene la somma di tutte le radici (le quali essendo positive, saranno negative nelle equazioni semplici) sarà negativo; il terzo termine contenendo gli ambj, cioè prodotto di numero pari, sarà positivo; il quarto contenendo i terni, cioè prodotto di numero dispari, sarà negativo, e così di mano in mano, e però un' equazione composta alternativamente di segni positivi, e negativi averà tutte le radici positive.

Quindi se i termini di un' equazione non averanno tutti il segno positivo, o non averanno alternativamente il positivo, e negativo, vi saranno radici positive, e negative. Altro argomento sicuro, che l'equazione contenga radici positive, e negative, sarà quando in essa manchi qualche termine, perchè non può un termine mancare, se non distruggendosi con i segni contrarj i prodotti, da' quali è formato, cioè se non essendovi delle radici positive, e negative. Questa notizia potrà servire per scegliere a suo luogo fra i molti divisori dell'ultimo termine di una formola, o equazione quelli, per i quali devesi tentare la divisione; perchè se l'equazione averà sole radici positive,

tive, sarà superfluo il tentare la divisione per i divisori positivi, e se avrà sole radici negative, sarà superfluo il tentarla per i divisori negativi; e si dovrà tentare per gli uni, e per gli altri, quando le radici sieno positive, e negative.

Tutto ciò però s'intenda detto di quelle equazioni, le di cui radici sono tutte reali, perchè nel caso delle immaginarie la regola non â luogo. Ed in fatti sia l'equazione $x^3 + bxx + aax + aab = 0$, in cui ciascun termine è affetto dal segno positivo, e pure le radici sono una positiva, e due negative, cioè $x = -b$ reale, ed $x = \pm\sqrt{-aa}$ immaginarie.

152. Le equazioni del terzo, e quarto grado, nelle quali manchi il secondo termine, se il terzo sarà affetto dal segno positivo, averanno infallibilmente delle radici immaginarie, perchè, essendo le radici tutte reali, il terzo termine non può non essere affetto dal segno negativo; e la ragione si è, che, parlando in primo luogo delle cubiche, quando in esse manchi il secondo termine, la somma delle radici positive è eguale alla somma delle negative, e però o una positiva sarà eguale a due negative, o due positive eguali alla negativa; quindi le radici sieno, per esempio, a, b, e $-c$, o pure $-a$, $-b$, $+c$, il coefficiente del terzo termine sarà $ab - ac - bc$, ma deve essere $a + b = c$ nella supposizione, che manchi il secondo termine, adunque sarà ac maggiore di ab, e perciò $ab - ac - bc$ quantità negativa.

Nelle

Nelle equazioni poi del quarto grado possono essere tre le radici positive, ed una negativa, cioè a, $+b$, $+c$, $-d$; possono essere tre negative, ed una positiva, cioè $-a$, $-b$, $-c$, $+d$; possono essere due negative, e due positive, cioè $-a$, $-b$, $+c$, $+d$; nel primo, e secondo caso il coefficiente del terzo termine sarà $ab + ac + bc - ad - bd - cd$; ma per la supposizione deve essere $a + b + c = d$, adunque sarà ad maggiore di ab, cd maggiore di ac, bd maggiore di bc, e però $ad + bd + cd$ maggiore di $ab + ac + bc$, ed in conseguenza il terzo termine negativo. Nel terzo caso il coefficiente del terzo termine sarà $ab - ac - bc - ad - bd + cd$, e deve essere $a + b = c + d$.

Si faccia $m = a + b = c + d$, sarà

$$mm = \overline{a+b} \times \overline{c+d} = ac + ad + bc + bd,$$

$$mm = \overline{a+b}^2 = aa + 2ab + bb,$$

$$mm = \overline{c+d}^2 = cc + 2cd + dd,$$ e però

$$ab = \frac{mm - aa - bb}{2},$$

$$cd = \frac{mm - cc - dd}{2},$$

e $ab + cd = \frac{mm - aa - bb - cc - dd}{2}$, dunque mm è maggiore di $ab + cd$, dunque $ac + ad + bc + bd$ è maggiore di $ab + cd$, e però il coefficiente del terzo termine negativo.

153. Egli è sempre in nostra mano il fare, che in una qualunque equazione tutte le radici vere o positive divengano false o negative, e le negative divengano positive. Nulla di più per ciò fare si richiede, che cambiare i segni a tutti i termini, che sono in ordine pari, cioè al secondo, al quarto, al sesto ec., la ragione si è, che essendo il secondo termine la somma di tutte le radici, in cui però sono le negative con segno positivo, e le positive con segno negativo, come chiaramente si è veduto al num. 145. nel formare le equazioni composte dal prodotto delle semplici, mutando i segni si muteranno esse pure; gl'altri termini in ordine pari sono formati da prodotti di numero dispari di radici, cioè il quarto da terni, il sesto da cinquine ec., quindi se ânno essi il segno positivo saranno formati dal prodotto di radici tutte negative, o da numero pari di radici positive, e numero dispari di radici negative; e se ânno il segno negativo saranno formati dal prodotto di radici tutte positive, o da numero pari di radici negative, e numero dispari di radici positive; dunque mutando il segno ai termini pari, le radici positive diverranno negative, ed all'opposto.

Rispetto ai termini dispari in ordine, essendo essi formati da prodotti pari di radici, se ânno il segno positivo, saranno formati o da numero pari di sole radici negative, o da numero pari di sole radici positive, o da nu-

mero

mero pari di positive, e pari di negative, quindi mutandosi reciprocamente queste, non si muterà il segno ad essi termini; se poi ânno il segno negativo, saranno formati da prodotto di numero dispari di radici positive in numero dispari di negative, quindi mutandosi pure queste reciprocamente, non si muterà il segno ad essi termini, e però si devono lasciare intatti.

L'equazione
$$\begin{array}{llll} x^3 + axx & + abx & - abc & \\ + bxx & - acx & & = 0 \\ - cxx & - bcx & & \end{array}$$
â tre radici, due sono negative, cioè $-a$, $-b$, o sia $x + a = 0$, $x + b = 0$, ed una positiva, cioè c, o sia $x - c = 0$. Mutando i segni a' termini in ordine pari dell'equazione, sarà
$$\begin{array}{llll} x^3 - axx & + abx & + abc & \\ - bxx & - acx & & = 0 \\ + cxx & - bcx & & \end{array}$$
e le radici positive saranno $x - a = 0$, $x - b = 0$; ed $x + c = 0$ la negativa. Nè importa, che alcun termine manchi, nel qual caso si pone la stelletta in luogo de' termini mancanti, e procede la stessa regola. Così nell'equazione $x^3 * - 28x + 48 = 0$, le di cui radici vere sono $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, e la falsa $x + 6 = 0$, mutando i segni ai termini pari in ordine, sarà $x^3 * - 28x - 48 = 0$, le di cui radici false sono $x + 2 = 0$, $x + 4 = 0$, e la vera $x - 6 = 0$.

154. Data una qualunque equazione, è facile per mezzo di congrue sostituzioni accrescere, o diminuire

 ciaf-

ciascuna delle di lei radici, anco non cognite, d'una data quantità, cioè trasformarla in un'altra equazione, le radici della quale sieno quelle della proposta accresciute, o diminuite della data quantità. Si ponga eguale ad una nuova incognita la incognita dell'equazione, aggiunta o sottratta da essa la data quantità, cioè aggiunta se per essa si vogliono accresciute, e sottratta se si vogliono diminuite. In luogo dell'incognita, e sue potestà nell'equazione proposta si sostituisca il suo valore dato per l'altra incognita, e per la costante data; e nascerà un'altra equazione, le di cui radici saranno come si cercano. Sia l'equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, le di cui radici si vogliano accresciute del numero 3. Si faccia $x + 3 = y$, e però $x = y - 3$, $xx = yy - 6y + 9$, $x^3 = y^3 - 9yy + 27y - 27$, $x^4 = y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$; adunque facendo le sostituzioni in luogo della x, e sue potestà nella proposta, si trasformerà essa in quest'altra

$$\begin{array}{rrrrrl} y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81 & & & & & \\ + 4y^3 - 36yy + 108y - 108 & & & & & \\ - 19yy + 114y - 171 & & & & & = 0 \\ - 106y + 318 & & & & & \\ - 120 & & & & & \end{array}$$

cioè $y^4 - 8y^3 - yy + 8y = 0$, e dividendo per y, $y^3 - 8yy - y + 8 = 0$, in cui è manifesto, che le radici saranno maggiori delle radici della proposta, quanto

è

è il numero 3, perchè se si è fatto $y = x + 3$, adunque sarà y uguale a ciascun valore di x accresciuto del 3. E quì si rifletta, che nell'accrescere in questo modo le radici, si accrescono di quella tale quantità le positive, ma le negative si diminuiscono della stessa quantità, perchè aggiungendo positivo a negativo, se il negativo è maggiore del positivo, si fa minore nel genere suo di prima, se è eguale si fa zero, se è minore si rende positivo; quindi nella proposta equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, le di cui radici (le quali però non si sanno per ora ritrovare coi metodi insegnati) sono $+5, -2, -4, -3$, cioè $x - 5 = 0, x + 2 = 0; x + 4 = 0, x + 3 = 0$ una vera e tre false, avendo io voluto accrescerle del numero 3, nella trasformata $y^3 - 8yy - y + 8 = 0$ dovranno essere $+8, +1, -1$, cioè $y - 8 = 0, y - 1 = 0, y + 1 = 0$, che tali appunto sono, ed è zero quella che corrisponderebbe alla quarta, perchè $-3 + 3 = 0$, e per questa ragione è di sole tre dimensioni l'equazione ridotta, sebbene di quattro la proposta.

All'opposto quando si diminuiscono d'una data quantità le radici di un'equazione, per la stessa ragione le negative crescono nel genere suo di quella quantità, ma le positive possono divenire nulle, se la data quantità è a loro uguale, e negative s'è di loro maggiore. Nella stessa equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$ volendo diminuire del numero 3 le radici, si fac-

cia

cia $x-3=y$, e però $x=y+3$, $xx=yy+6y+9$, $x^3=y^3+9yy+27y+27$, $x^4=y^4+12y^3+54yy+108y+81$, e però fatte le sostituzioni, sarà l'equazione

$$\begin{array}{l} y^4+12y^3+54yy+108y+81 \\ \quad +4y^3+36yy+108y+108 \\ \quad\quad -19yy-114y-171 \quad =0 \\ \quad\quad\quad -106y-318 \\ \quad\quad\quad\quad -120 \end{array}$$

cioè $y^4+16y^3+71yy-4y-420=0$, e perchè le radici della proposta sono $5,-2,-3,-4$, cioè $x-5=0$, $x+2=0$, $x+3=0$, $x+4=0$, dovranno essere quelle della trasformata $2,-5,-6,-7$, cioè $y-2=0$, $y+5=0$, $y+6=0$, $y+7=0$, che tali appunto sono.

Sia l'equazione $x^3+cxx-bbx-bbc=0$, e si vogliano accrescere della data quantità a le di lei radici. Si faccia $x+a=y$, e però $x=y-a$, $xx=yy-2ay+aa$, $x^3=y^3-3ayy+3aay-a^3$; quindi fatte le sostituzioni, sarà l'equazione

$$\begin{array}{l} y^3-3ayy+3aay-a^3 \\ \quad +cyy-2acy+aac \quad =0, \\ \quad\quad -bby+abb \\ \quad\quad\quad -bbc \end{array}$$

le di cui radici sono maggiori di quelle della proposta, quanto è la quantità a, ed in fatti le radici di quella sono $x-b=0$, $x+b=0$, $x+c=0$, e di questa sono $y-b+a=0$, $y+b-a=0$, $y+c-a=0$.

155. In simil modo si potrà, data un'equazione, trasformarla in un'altra, le di cui radici sieno le medesime della proposta, ma moltiplicate, o divise per una data quantità, per esempio f, facendo la sostituzione di $fx = y$ (essendo x l'incognita della data equazione) se si vogliano moltiplicate, e facendo $\frac{x}{f} = y$ se si vogliano divise. Così pure si farà $x = \frac{gy}{f}$ se si voglia, che le radici della trasformata abbiano a quelle della proposta la ragione di f alla g; e farassi $\sqrt{fx} = y$ se si voglia, che sieno medie proporzionali tra la quantità f, e le radici della proposta. Similmente farassi $x = \frac{1}{y}$ se si voglia, che sieno reciproche ec.

156. La ragione di queste regole è chiara; imperocchè, preso il primo caso, cioè quello delle radici accresciute, facendosi la sostituzione di $x + a = y$, i valori di y cavati dall'equazione trasformata saranno eguali ad $x + a$, cioè eguali ai valori della proposta accresciuti della quantità a; e similmente si discorra in proporzione negl'altri casi.

157. Molti sono gli usi, che si possono fare delle dette sostituzioni; uno può essere, che se, non avendo noi il modo di riconoscere, quali sieno le radici d'una proposta equazione, trasformandola in alcuna delle accen-

cennate maniere ſi poteſſero ritrovare le radici della trasformata, queſte accreſciute, o diminuite, moltiplicate, o diviſe ec., per la quantità coſtante, ſecondo la ſoſtituzione fatta, ſarebbero anche le radici della propoſta.

158. Altro uſo ſarà di liberare qualora ſi vuole dalle frazioni, e molte volte da' ſordi le equazioni. E quanto alle frazioni, ſi faccia l'incognita dell'equazione eguale ad una nuova incognita diviſa per la minima quantità, che per ciaſcuno de' denominatori de' termini dell'equazione ſia diviſibile, la quale nel caſo, che eſſi denominatori foſſero primi tra loro, ſarà il prodotto de' medeſimi; indi fatte le ſoſtituzioni, e ridotti i termini al comune denominatore, ſi avrà un'altra equazione libera dalle frazioni, le di cui radici ſaranno quelle della propoſta moltiplicate nella quantità, per cui è ſtata diviſa la nuova incognita. Sia l'equazione $y^3 + \frac{ayy}{6} - \frac{aby}{3} + aab = 0$; ſi faccia $y = \frac{z}{6}$, $yy = \frac{zz}{36}$, $y^3 = \frac{z^3}{216}$, onde ſarà l'equazione $\frac{z^3}{216} + \frac{azz}{6 \times 36} - \frac{abz}{3 \times 6} + aab = 0$, e riducendo al comune denominatore, ſarà $z^3 + azz - 12abz + 216aab = 0$, le di cui radici diviſe per 6 ſaranno le radici della propoſta. Sia $x^3 - \frac{axx}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$. Si faccia $x = \frac{z}{bcd}$, e

fatte

fatte le sostituzioni, sarà la trasformata $\frac{z^3}{b^3c^3d^3} - \frac{azz}{b^3ccdd} + \frac{aaz}{bccd} + \frac{a^3}{d} = 0$, e riducendo al comune denominatore, sarà $z^3 - acdzz + aabbcddz + a^3b^3c^3dd = 0$; quindi se si sappia il valore di z, si saprà quello di x ancora. Medesimamente per liberare le equazioni da' sordi, il che succede talora, si ponga la incognita eguale ad una nuova incognita divisa per la radicale, e si facciano le sostituzioni. Sia l'equazione $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26x}{27} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$. Si faccia $x = \frac{z}{\sqrt{3}}$; e però $xx = \frac{zz}{3}$, $x^3 = \frac{z^3}{3\sqrt{3}}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{z^3}{3\sqrt{3}} - \frac{zz\sqrt{3}}{3} + \frac{26z}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, e moltiplicando per $3\sqrt{3}$, sarà $z^3 - 3zz + \frac{26z}{9} - \frac{8}{9} = 0$, e finalmente liberando dalle frazioni nella suddetta maniera col fare $z = \frac{y}{9}$, ovvero $z = \frac{y}{3}$, che in questo caso riesce più brevemente, sarà l'equazione $y^3 - 9yy + 26y - 24 = 0$. E perchè per la prima sostituzione è $x = \frac{z}{\sqrt{3}}$, e per la seconda $z = \frac{y}{3}$, sarà $x = \frac{y}{3\sqrt{3}}$, cioè il valore della x sarà eguale al valore della y diviso per $3\sqrt{3}$.

 Sia

Sia $x^4 - x^3\sqrt[3]{nn} + pxx\sqrt[3]{n} - qx + \frac{r}{\sqrt[3]{n}} = 0$; si faccia $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$, e però $xx = \frac{yy}{\sqrt[3]{nn}}$, $x^3 = \frac{y^3}{n}$, $x^4 = \frac{y^4}{n\sqrt[3]{n}}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{y^4}{n\sqrt[3]{n}} - \frac{y^3\sqrt[3]{nn}}{n} + \frac{pyy\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{nn}} - \frac{qy}{\sqrt[3]{n}} + \frac{r}{\sqrt[3]{n}} = 0$, e moltiplicando per $n\sqrt[3]{n}$, sarà $y^4 - ny^3 + npyy - nqy + rn = 0$. Se si voglia osservare la legge degl' omogenei, si libereranno dai radicali le equazioni, ma nasceranno delle frazioni, che dovranno ridursi, come si è detto.

159. Poichè levando i radicali per mezzo dell' accennata sostituzione null' altro si fa, che moltiplicare le radici dell' equazione per esso radicale, è facile il conoscere, che se il radicale sarà quadratico, per esempio $\sqrt{n}$, bisognerà, acciò possa togliersi dall' equazione, che il secondo termine dell' equazione proposta contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo egli il complesso di tutte le radici dell' equazione, si verrà a moltiplicare per $\sqrt{n}$; converrà, che il terzo non contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo egli il complesso degl' ambj de' valori o radici dell' equazione, si verrà a moltiplicare per il quadrato di $\sqrt{n}$; così converrà, che il quarto contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo

il compleſſo di tutti i terni verrà in conſeguenza a moltiplicarſi per $n\sqrt{n}$; Converrà, che il quinto non contenga eſſo radicale, e così alternativamente. Per la ſteſſa ragione, ſe il radicale da toglierſi foſſe $\sqrt[3]{n}$, biſognerà, che nel ſecondo termine dell' equazione propoſta ſi trovi $\sqrt[3]{nn}$, nel terzo $\sqrt[3]{n}$, in neſſun modo nel quarto, $\sqrt[3]{nn}$ nel quinto, $\sqrt[3]{n}$ nel ſeſto, in neſſun modo nel ſettimo ec. In proporzione ſi diſcorra de' radicali di altro indice.

160. Per mezzo di queſte ſoſtituzioni ſi potrà pure levare il ſecondo termine da qualunque equazione, e ciò ponendo la incognita eguale ad una nuova incognita, aggiunto, o ſottratto il coefficiente del ſecondo termine diviſo per il grado dell' equazione data, cioè aggiunto, ſe eſſo ſecondo termine â il ſegno negativo, e ſottratto, ſe â il ſegno poſitivo. Sia l'equazione $xx + ax - bb = 0$, ſi faccia $x = z - \frac{a}{2}$, e fatte le ſoſtituzioni, ſarà

$$\begin{aligned} zz - az &+ \frac{aa}{4} \\ + az &- \frac{aa}{2} = 0, \\ &- bb \end{aligned}$$

cioè $zz * - \frac{aa}{4} - bb = 0$, o ſia $zz = \frac{aa}{4} + bb$, onde ſi vede, come tutte le equazioni di quadratica affetta ſi poſſono in

questo modo più speditamente risolvere di quello, che si è usato al num. 74.; sottratto pertanto $\frac{1}{2}a$ dal valore di z, averassi il valore della x.

Sia $x^3 + bxx - abx - a^3 = 0$. Si ponga $x = z - \frac{b}{3}$, e però fatte le sostituzioni, sarà

$$z^3 * - \frac{bbz}{3} + \frac{2b^3}{27} - abz + \frac{abb}{3} - a^3 = 0;$$

quindi levato $\frac{b}{3}$ dal valore di z, averassi il valore della x.

Sia l'equazione $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0$.
$ - ccxx$

Fatta $x = z + \frac{2a}{4}$, cioè $x = z + \frac{a}{2}$, e fatte le sostituzioni, sarà l'equazione

$$z^4 * + \frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{5a^4}{16} - cczz - accz - \frac{aacc}{4} = 0.$$

E però aggiunto $\frac{1}{2}a$ al valore di z, averassi il valore di x.

161. Similmente si potrà levare il terzo termine dalle equazioni nel seguente modo. Sia l'equazione $x^4 - 3ax^3 + 3aaxx - 5a^3x - 2a^4 = 0$, si faccia $x = y - b$ (la b è un' indeterminata da fissarsi) e fatte le sostituzioni,

sarà

$$\text{ſarà}\quad \begin{matrix} y^4 - 4hy^3 + 6hhyy - 4h^3y + h^4 \\ -3ay^3 + 9ahyy - 9ahhy + 3ah^3 \\ + 3a^2yy - 6aahy + 3aahh \\ - 5a^3y + 5a^3h \\ - 2a^4 \end{matrix} = 0.$$

Ma acciò che in queſta equazione foſſe nullo il terzo termine biſognerebbe, che foſſe $6hh + 9ah + 3aa = 0$, cioè $hh + \frac{3ah}{2} + \frac{aa}{2} = 0$, e però $h = -\frac{3a}{4} \pm \frac{a}{4}$, dal che s'impara a conoſcere, che la ſoſtituzione da farſi in luogo di $y - h$ doveva eſſere $y + \frac{a}{2}$, o pure $y + a$, come di fatto sì l'una, come l'altra ci toglie il terzo termine, dàndoci la prima $y^4 - ay^3 * - \frac{15a^3y}{4} - \frac{65a^4}{16} = 0$, e la ſeconda $y^4 + ay^3 * - 4a^3y - 6a^4 = 0$.

Con tale artifizio ſi conoſce, che per togliere il ſecondo termine ſi devono fare le ſoſtituzioni, che ſi ſono praticate al num. 160.

162. Che ſe un'equazione, in cui manchi il ſecondo termine, ſi vorrà trasformare in un'altra, in cui manchi il penultimo, baſterà fare la ſoſtituzione di una qualunque coſtante diviſa per una nuova incognita in luogo dell'incognita della data equazione. Sia pertanto $x^4 * + aaxx - a^3x + a^4 = 0$. Si faccia $x = \frac{aa}{y}$, ſarà $\frac{a^8}{y^4} + \frac{a^6}{yy} - \frac{a^5}{y} + a^4 = 0$,

e ri-

e riducendo al comune denominatore, e dividendo per a^4, sarà $y^4 - ay^3 + aayy * + a^4 = 0$. Se nella sostituzione $x = \frac{aa}{y}$ in luogo della costante a avessi presa un'altra qualunque, avrei ottenuto il medesimo intento, ma l'equazione trasformata avrebbe avuto delle frazioni.

163. Che se nella proposta equazione non manca il secondo termine, ma bensì il terzo, o quarto ec., si potrà col medesimo metodo fare sparire quello, che dall' ultimo è egualmente distante, come quello, che manca, lo è dal primo.

164. Ed all'opposto mancando nell'equazione uno, o più termini, si potrà sempre renderla compita, facendo una nuova incognita più, o meno una qualunque costante eguale all'incognita dell'equazione, e la trasformata avrà tutti i termini. Se di più si volesse, che la trasformata fosse di grado superiore, si moltiplichi ciascun termine della proposta per tanta potestà dell'incognita, per quanta si vuole, che cresca il grado, indi si faccia la stessa sostituzione. Così se, data l'equazione $x^4 - a^4 = 0$, si volesse mutata in un'altra compita, e del sesto grado, farebbesi $x^6 - a^4 xx = 0$, indi la sostituzione indicata, cioè $x = z \pm a$ (intendendo per a qualunque si voglia costante) ed avrebbesi l'equazione, che si cerca, ommettendosi ora il calcolo per brevità.

165.

165. Ridotte le equazioni in maniera, che abbiano il massimo termine positivo, e senza coefficienti, che sieno libere da frazioni, e sordi, e paragonate al zero; prima di giudicare, che il problema sia di quel grado, di cui è l'equazione, bisogna vedere, se ella abbia divisori di una, di due, o di più dimensioni, per i quali divisa si riduca a grado inferiore; imperciocchè del grado della ridotta è propriamente il problema, e non della prima. Un'equazione cubica, se abbia un divisore di una dimensione, per esso divisa si riduce a due dimensioni, e le due radici di questa, che si averanno per le regole de' numeri 73., e 74., ed il divisore saranno le tre radici della proposta, quindi il problema, che a tale equazione ci â portati non è cubico, ma piano, e si potrà costruire *colla sola Regola*, e *Compasso*, cioè con rette linee, e circoli. Un'equazione del quarto grado se abbia due divisori di una dimensione, per essi divisa si ridurrà a due dimensioni, le radici della quale con i due divisori saranno le quattro radici della proposta, e però il problema sarà piano; nello stesso modo, se abbia un divisore di due dimensioni, un'altro di due dimensioni sarà il quoziente, le di cui radici con le radici del divisore saranno le quattro della proposta, e però piano il problema. Se poi avrà un solo divisore di una dimensione, la ridotta sarà di tre, ed il problema sarà bensì solido, ma del

terzo

terzo grado, e non del quarto, come appariva. Un' equazione del quinto grado, se avrà tre divisori di una dimensione, o uno di una, ed uno di due (che è lo stesso caso come se ne avesse due di due dimensioni, perchè necessariamente ne averebbe anche uno di una) si ridurrà a due dimensioni, e però si potranno avere le cinque radici, ed il problema sarà piano; se ne abbia un solo di una dimensione si ridurrà al quarto grado, e del quarto grado sarà il problema; se ne avrà due di una, o uno di due, si ridurrà al terzo grado, ed il problema sarà del terzo grado: in simil modo si discorra dell'altre. La maniera di ritrovare i divisori di una dimensione è stata insegnata al num. 56.

166. Ma oltre a questi, siccome possono avere le equazioni dei divisori di due, e più dimensioni, sì razionali, come irrazionali, con essi in simil modo operando, e nella stessa maniera discorrendo, devesi tentare la divisione dell'equazione proposta, quando però siasi provata prima la divisione per i divisori di una dimensione, il che generalmente devesi sempre premettere, qualunque siasi l'equazione.

167. La maniera di ritrovare questi divisori per le equazioni del quarto grado può essere la seguente; giacchè quelle del terzo, o sono irriducibili, o si possono ridurre per un divisore lineare razionale, per essere esse (come si suppone) libere da' radicali.

Sup-

Supposto, che l'equazione del quarto grado sia per i divisori d'una sola dimensione irriducibile, si tolga da essa il secondo termine, (num. 160.) e nasca, per esempio, l'equazione $x^4 * - 17aaxx - 20a^3x - 6a^4 = 0$. Si supponga questa eguale al prodotto di due del secondo grado, cioè di $xx + xy + z = 0$, e di $xx - xy + u = 0$, nelle quali le y, z, u sono indeterminate da fissarsi nel progresso, e le u, z possono avere qualunque segno; il prodotto sarà

$$\begin{aligned} x^4 * &+ zxx \\ &- yyxx - yzx + uz \\ &+ uxx + uyx \end{aligned} = 0,$$

quindi si paragoni termine per termine questa equazione colla proposta; e dal paragone de' terzi termini si ricava $z = -17aa + yy - u$; dal paragone de' quarti $u = -\frac{20a^3}{y} + z$, e ponendo in luogo di z il valore già ritrovato a fine d'avere la u data solo per la y, e per le note, sarà $u = -\frac{20a^3}{2y} - \frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2}$, e ponendo questo valore di u nell'equazione $z = -17aa + yy - u$, averassi $z = -\frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2} + \frac{20a^3}{2y}$; dal paragone degl'ultimi termini si ricava $uz = -6a^4$, e ponendo in luogo di z, e di u i suoi valori dati per la sola y, e per le note, sarà $\frac{289a^4}{4} - \frac{34aayy}{4} - \frac{400a^6}{4yy} + \frac{y^4}{4} = -6a^4$, cioè riducendo al comune denominatore,

$$\begin{aligned} y^6 - 34aay^4 &+ 289a^4yy - 400a^6 \\ &+ 24a^4yy \end{aligned} = 0,$$

 equa-

equazione trasformata, che si può considerare come del terzo grado, per non esservi nè y^5, nè y^3, nè y. In quest' equazione si ritrovino i divisori dell' ultimo termine; e perchè, sebbene ella è del sesto grado, pure si considera, come del terzo, si tenti se sia divisibile per $yy \pm$ questi divisori, tra quali si sceglieranno quelli soli di due dimensioni, come è chiaro; e si ritroverà, che è divisibile per $yy - 16aa = 0$, adunque sarà $yy = 16aa$, ed $y = \pm 4a$. Nelle equazioni $u = -\frac{20a^3}{2y} - \frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2}$, e $z = \frac{20a^3}{2y} - \frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2}$, sostituito il valore di $y = 4a$, avrassi $u = -3aa$, $z = 2aa$; adunque le due equazioni sussidiarie $xx + xy + z = 0$, $xx - xy + u = 0$ dovranno essere $xx + 4ax + 2aa = 0$, e $xx - 4ax - 3aa = 0$, nelle quali si risolve l'equazione $x^4 * - 17aaxx - 20a^3x - 6a^4 = 0$, se per una di esse si divida.

Ma le radici di quelle sono (nu. 74.) $x = -2a \pm \sqrt{2aa}$ per la prima, ed $x = 2a \pm \sqrt{7aa}$ per la seconda, dunque sono anche le radici dell' equazione $x^4 - 17aaxx$ ec., e tutte quattro reali, una positiva, e tre negative.

Se l'equazione trasformata non avesse divisore alcuno, non occorrerebbe cercare altro in questo caso, perchè nè meno ne averebbe la proposta.

Quantunque nel valore della y si abbia $y = \pm 4a$, pure ò fatto uso del solo segno positivo, perchè è affatto in-

indifferente il servirsi del positivo, o del negativo, essendo l'esito dell'operazione lo stesso nell'uno, e nell'altro caso. In fatti si ponga $y = -4a$, sarà $u = 2aa$, $z = -3aa$, e le due equazioni le stesse di prima, cioè $xx - 4ax - 3aa = 0$, $xx + 4ax + 2aa = 0$.

Sia l'equazione $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0$;
$\qquad\qquad\qquad\qquad - ccxx$

togliendo il secondo termine colla sostituzione $x = z + \frac{a}{2}$, si muterà in $z^4 * + \frac{aazz}{2} - a^3z + \frac{5a^4}{16} = 0$.
$\qquad - cczz - accz - \frac{aacc}{4}$

Facendo per tanto il paragone di questa con l'equazione
$z^4 * + uzz - pyz + pu = 0$, che è il prodotto delle due
$\qquad - yyzz + uyz$
$\qquad + pzz$

$zz + yz + p = 0$, $zz - yz + u = 0$; al solito dal paragone de' terzi termini averemo $p = yy - u + \frac{aa}{2} - cc$, dal paragone de' quarti $u = p - \frac{a^3 - acc}{y}$, cioè, posto in luogo di p il suo valore, $u = \frac{yy}{2} + \frac{aa}{4} - \frac{cc}{2} - \frac{a^3 - acc}{2y}$, e però $p = \frac{yy}{2} + \frac{aa}{4} - \frac{cc}{2} + \frac{a^3 + acc}{2y}$, e finalmente dal paragone degl' ultimi termini averemo $pu = \frac{5a^4}{16} - \frac{aacc}{4}$, cioè, posti i valori di p, e di u,

$$\left.\begin{array}{l} y^6 + aay^4 - a^4yy - a^6 \\ -2ccy^4 + c^4yy - 2a^4cc \\ \qquad\qquad - aac^4 \end{array}\right\} = 0.$$

Ora i divisori dell'ultimo termine, intendendo di due dimensioni, sono aa, ed $aa + cc$, e la divisione succede per $yy - aa - cc = 0$, adunque sarà $yy = aa + cc$, ed $y = \pm\sqrt{aa + cc}$, e però $u = \frac{3aa}{4} - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa + cc}}$, $p = \frac{3aa}{4} + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa + cc}}$, e le due equazioni $zz + yz + p = 0$, e $zz - yz + u = 0$ saranno $zz + z\sqrt{aa + cc} + \frac{3aa}{4} + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa + cc}} = 0$,

$$zz - z\sqrt{aa + cc} + \frac{3aa}{4} - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa + cc}} = 0,$$

cioè $zz + z\sqrt{aa + cc} + \frac{3aa}{4} + \frac{a}{2}\sqrt{aa + cc} = 0$,

$$zz - z\sqrt{aa + cc} + \frac{3aa}{4} - \frac{a}{2}\sqrt{aa + cc} = 0,$$

e quali due equazioni risolute ci danno i quattro valori

$$z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

rispetto alla prima;

e $\quad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$

rispetto alla seconda;

e per-

e perchè esse sono i divisori dell'equazione

$$\begin{array}{l} z^4 \; * + \frac{aazz}{2} - a^3 z + \frac{5a^4}{16} \\ \quad - cczz - accz - \frac{aacc}{4} \end{array} = 0,$$

le suddette radici saranno pure quelle della stessa equazione; ed essendo stata fatta la sostituzione di $x = \frac{a}{2} + z$,

saranno $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$,

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}},$$

che sono i quattro valori dell'equazione proposta

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3 x + a^4 \\ \qquad\quad - ccxx \end{array} = 0.$$

168. Ma si può formare un canone, o sia formola generale sì per l'equazione trasformata, come per le due sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, che si assumono a fine di avere i divisori, alle quali formole rapportarsi universalmente, qualunque siasi l'equazione del quarto grado, a cui manchi, o sia tolto il secondo termine. Sia adunque l'equazione generale $x^4 \; * \pm pxx \pm qx \pm r = 0$. Prese le due sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, e fattone il prodotto

$$\begin{array}{l} x^4 \; * + zxx \\ \qquad - yyxx - yzx + uz \\ \qquad + uxx + uyx \end{array} = 0;$$

ſi paragoni termine per termine colla propoſta, e dal paragone de' terzi termini troveraſſi $z = \pm p + yy - u$; dal paragone de' quarti $u = z \pm \frac{q}{y}$, e ſoſtituito in luogo di z il ſuo valore, ſarà $u = \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y}$; cioè $+p$ ſe nella propoſta il terzo termine è poſitivo, e $-p$ ſe è negativo; e così nello ſteſſo modo $+q$ ſe è poſitivo il quarto, e $-q$ ſe è negativo; e queſto poſto in luogo di u nel primo paragone, averaſſi $z = \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y}$; cioè $+p$ ſe è poſitivo il terzo termine della propoſta, e $-p$ ſe è negativo; e per l'oppoſto $-q$ ſe è poſitivo il quarto, e $+q$ ſe è negativo; dal paragone degl' ultimi troveraſſi $zu = \pm r$, cioè $\overline{\pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y}} \times \overline{\pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y}} = \pm r$, e facendo l'attuale moltiplicazione, e riducendo al comune denominatore, $y^6 \pm 2py^4 + ppyy - qq = 0$, equazione
$\mp 4ryy$
trasformata, che può dirſi cubica, nella quale ſarà $+2p$ ſe il terzo termine della propoſta ſia poſitivo, e $-2p$ ſe ſia negativo; e ſarà $-4r$ ſe l'ultimo della propoſta ſia poſitivo, e $+4r$ ſe ſia negativo. Se nelle due equazioni ſuſſidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$ in luogo di z, ed u ſi porranno i valori di ſopra ritrovati, ſa-

ran-

ranno esse $xx + yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y} = 0$, ed $xx - yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y} = 0$, quindi se l'equazione trasformata sarà divisibile per $yy \pm$ un divisore di due dimensioni dell' ultimo termine, avrassi il valore della y, che sostituito nelle due $xx + yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y} = 0$, $xx - yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y} = 0$, ci somministrerà i divisori della proposta $x^4 * \pm pxx \pm qx \pm r = 0$, e se la trasformata non sarà divisibile, nè meno lo sarà la proposta.

Sia l' equazione $x^4 * - 4aaxx - 8a^3x + 35a^4 = 0$; riferendo questa alla canonica $x^4 * \pm pxx \pm qx \pm r = 0$, sarà $p = 4aa$, $q = 8a^3$, $r = 35a^4$, e però la trasformata sarà

$$\begin{array}{l} y^6 - 8aay^4 + 16a^4yy - 64a^6 = 0, \\ \qquad\qquad\quad - 140a^4yy \end{array}$$

cioè $y^6 - 8aay^4 - 124a^4yy - 64a^6 = 0$, e le due sussidiarie saranno $xx + yx - 2aa + \frac{yy}{2} + \frac{4a^3}{y} = 0$, $xx - yx - 2aa + \frac{yy}{2} - \frac{4a^3}{y} = 0$; ma poichè la trasformata (ritrovati i divisori dell'ultimo termine) è divisibile per $yy - 16aa$, averemo $yy = 16aa$, ed $y = 4a$, i quali valori sostituiti nelle due sussidiarie daranno $xx + 4ax + 7aa = 0$, $xx - 4ax + 5aa = 0$, che sono i divisori della proposta $x^4 * - 4aaxx - 8a^3x + 35a^4 = 0$, le di cui quattro radici

dici $x = -2a \pm \sqrt{-3aa}$, $x = 2a \pm \sqrt{-aa}$ tutte immaginarie.

169. Alle volte il ſolo togliere dall' equazione il ſecondo termine baſta per ridurla ad eſſere piana, e così riſparmiare tutte l' altre operazioni. Tale ſarebbe, per eſempio, l'equazione $x^4 + 2cx^3 \begin{matrix} -2acxx \\ +ccxx \end{matrix} - 2aacx - aacc = 0$, la quale, giacchè non è riducibile per alcun diviſore dell' ultimo termine, togliendo il ſecondo termine col fare $x = y - \frac{c}{2}$, ſi muta in queſta

$$y^4 * \begin{matrix} -2aayy \\ -\frac{ccyy}{2} \end{matrix} * \begin{matrix} +\frac{c^4}{16} \\ -\frac{aacc}{2} \end{matrix} = 0,$$

quadratica affetta, le di cui radici diminuite della quantità $\frac{c}{2}$, per la ſoſtituzione $x = y - \frac{c}{2}$, ſaranno quelle della propoſta.

170. Eſigge queſto metodo, che ſi tolga dall' equazione il ſecondo termine, nè ſi eſtende oltre le equazioni del quarto grado; eccone adunque un' altro, che non obbliga a levare termine alcuno, e può applicarſi tanto alle equazioni del quarto grado, come a quelle del quinto, e ſeſto, e talora a quelle di grado ſuperiore ancora. Sia l' equazione $x^4 + ax^3 \begin{matrix} +aaxx \\ -abxx \end{matrix} - aabx - a^3b = 0$,

ſi

si prendano due equazioni sussidiarie del secondo grado $xx+yx+u=0$, $xx+fx+z=0$, nelle quali le y, u, f, z sono indeterminate da fissarsi nel progresso, e se ne faccia il prodotto

$$\begin{matrix} x^4+yx^3+uxx+ufx+zu \\ +fx^3+fyxx+zyx \\ +zxx \end{matrix} = 0,$$

che si paragoni termine per termine con l'equazione proposta. Dal paragone de' secondi termini troverassi $f=a-y$; dal paragone degl'ultimi $z=-\frac{a^3b}{u}$; e dal paragone de' quarti $yz+fu=-aab$, e sostituendo in luogo di f, e di z i suoi valori $a-y$, $-\frac{a^3b}{u}$ a fine di avere un'equazione espressa con le sole y, u, e le cognite, sarà $y=\frac{auu+aabu}{uu+a^3b}$. E perchè si è trovato dal paragone degl'ultimi termini $zu=-a^3b$, dovrà essere u un divisore di $-a^3b$; adunque si trovino i divisori di due dimensioni di $-a^3b$ (giacchè quelli di una, e di tre non servono, per essere le equazioni sussidiarie del secondo grado) che sono $\pm ab$, $\pm aa$. Si cominci a prendere in luogo di u uno dei divisori, per esempio ab, che sostituito nell'equazione $y=\frac{auu+aabu}{uu+a^3b}$, ci dà $y=\frac{2ab}{a+b}$, quindi posti questi valori di y, e di u nell'equazione sussidiaria $xx+yx+u=0$, sarà essa $xx+\frac{2abx}{a+b}+ab=0$,

 e

e per essa si tenti la divisione dell' equazione proposta, e se questa succeda, sarà $\frac{xx + 2abx + ab}{a+b} = 0$ un divisore, ed il quoziente l'altro; ma poichè non succede la divisione, si tenti, prendendo in luogo di u l'altro divisore $-ab$ dell'ultimo termine, e sarà $y = 0$, e però l'equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$ sarà $xx - ab = 0$, per cui divisa la proposta, succede esattamente la divisione dandoci di quoziente $xx + ax + aa = 0$; adunque i divisori dell'equazione proposta $x^4 + ax^3 + aaxx - abxx - aabx - a^3b = 0$ sono $xx - ab = 0$, $xx + ax + aa = 0$.

Anche prendendo in luogo di u il divisore aa dell' ultimo termine, per cui si trova $y = a$, e l'equazione sussidiaria $xx + ax + aa = 0$, succede la divisione dandoci di quoziente $xx - ab = 0$, cioè gli stessi divisori di prima.

Che se provati tutti i divisori dell'ultimo termine in luogo di u, per nessuno succede l'operazione, l'equazione proposta non può, almeno con questo metodo, abbassarsi, ed il problema rimane di quel grado, che mostra l'equazione.

Ma senza tentare la divisione, si potrebbe anco, preso in luogo di u ciascuno de' divisori di due dimensioni dell'ultimo termine, ed i corrispondenti valori di y, f, z, sostituirli in luogo loro nelle formole sussidiarie $xx + yx + u = 0$, $xx + fx + z = 0$; e se il prodotto di queste ci darà l'equazione proposta, saranno esse i divi-

sori cercati. Così preso in luogo di u il divisore $-ab$, si â $y=0$, e però $s=a$, $z=aa$, e le due equazioni sussidiarie saranno $xx-ab=0$, $xx+ax+aa=0$, il prodotto delle quali forma l'equazione proposta.

Sia l'equazione
$$\begin{matrix} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0. \\ \qquad\qquad - ccxx \end{matrix}$$

Si paragoni questa col prodotto

$$\begin{matrix} x^4 + yx^3 + uxx + sux + zu \\ + sx^3 + syxx + zyx \qquad = 0 \\ + zxx \end{matrix}$$

delle due solite equazioni sussidiarie $xx+yx+u=0$, $xx+sx+z=0$. Dal paragone de' secondi termini caverassi $s=-2a-y$; dal paragone degl'ultimi $z=\frac{a^4}{u}$. Si prenda il paragone de' terzi, e non de' quarti per avere il valore della y dato anche per la c (la quale lettera deve essere necessariamente ne' divisori, il che non potrassi avere dal paragone de' quarti) sarà adunque $u+sy+z=2aa-cc$, e posti i valori di s, e di z, sarà $yy+2ay=\frac{a^4}{u}-2aa+cc+u$, in cui sostituito in luogo di u uno de' divisori $\pm aa$ dell'ultimo termine, per esempio $+aa$, e risoluta l'equazione, sarà $y=-a\pm\sqrt{aa+cc}$, e posti nell'equazione $xx+yx+u=0$ i valori della u, e della y (preso per la quantità radicale il segno o positivo, o negativo, come più si vuole, perchè in fine

 tor-

torna lo stesso, come si può vedere calcolando nell'uno, e nell'altro modo) averassi $xx - ax + x\sqrt{aa + cc} + aa = 0$, per cui succede la divisione della proposta equazione, dando di quoziente $xx - ax - x\sqrt{aa + cc} + aa = 0$, ed in conseguenza le quattro radici dell'equazione proposta saranno

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Sia l'equazione $x^4 + 2bx^3 + bbxx - a^3b = 0$; si paragoni col prodotto

$$\begin{array}{l} x^4 + yx^3 + uxx + fux + zu \\ \quad + fx^3 + fyxx + zyx \qquad = 0 \\ \qquad + zxx \end{array}$$

delle due solite formole sussidiarie $xx + yx + u = 0$, $xx + fx + z = 0$. Dal paragone de' secondi termini avremo $f = 2b - y$; dal paragone degl'ultimi, $z = -\frac{a^3b}{u}$; dal paragone de' quarti caveremo $zy + fu = 0$, e posti i valori di f, e di z, sarà $-\frac{a^3by}{u} + 2bu - uy = 0$, cioè $y = \frac{2buu}{a^3b + uu}$. Ma preso ciascuno de' divisori razionali $\pm aa$, $\pm ab$ dell'ultimo termine, e posto in luogo di u, e fatto il rimanente al solito, non succede l'operazione; adunque si tenti per mezzo de' divisori irrazionali $\pm a\sqrt{ab}$ dell'

dell'ultimo termine, e però posto in luogo di u il divisore irrazionale $a\sqrt{ab}$, sarà $y=b$, quindi l'equazione sussidiaria $xx+yx+u=0$ verrà ad essere $xx+bx+a\sqrt{ab}=0$, per cui divisa la proposta darà di quoziente $xx+bx-a\sqrt{ab}=0$.

171. Intorno alle equazioni del quinto grado è chiaro, che se elle non sono divisibili per un divisore lineare, come già suppongo, non potranno esserlo se non per uno del secondo grado, ed uno del terzo. Per tali equazioni adunque si prendano due equazioni sussidiarie, del terzo grado l'una, e l'altra del secondo, ed il prodotto di queste si paragoni termine per termine con la proposta equazione in simil modo, come sopra.

Sia adunque l'equazione

$$x^5-4ax^4+6aax^3-8a^3xx+5a^4x-a^5=0;$$

si prendano le due sussidiarie $xx+yx+u=0$, $x^3+txx+fx+z=0$, e se ne faccia il prodotto

$$\left.\begin{array}{l} x^5+yx^4+ux^3+tuxx+fux+zu \\ \quad+tx^4+tyx^3+fyxx+zyx \\ \qquad+fx^3+zxx \end{array}\right\}=0,$$

che si paragoni colla proposta equazione, e dal paragone de' secondi termini si avrà $t=-4a-y$, dal paragone degl'ultimi $z=-\frac{a^5}{u}$, dal paragone de' quinti $f=\frac{5a^4-zy}{u}$, e sostituito il valore di z, $f=\frac{5a^4}{u}+\frac{a^5y}{uu}$; dal paragone

de'

de' terzi finalmente avrassi $u + ty + s = 6aa$, e posti in luogo di t, e di s i loro valori, per avere un equazione con le sole y, ed u, e le cognite, sarà $yy + 4ay - \frac{a^5 y}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$. E perchè dal paragone degl'ultimi termini abbiamo $z = -\frac{a^5}{u}$, sarà u un divisore di $-a^5$, onde ritrovati tutti i divisori di due dimensioni di $-a^5$, si sostituiscano ad uno ad uno nell'equazione $yy + 4ay - \frac{a^5}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$ a fine di avere il valore della y, e questo si ponga in luogo della y nell'equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$, siccome il valore di u; e se per questa succede la divisione dell'equazione proposta, averemo l'intento. Sono adunque i divisori di due dimensioni dell'ultimo termine $\pm aa$. Si prenda $+aa$, e si sostituisca in luogo di u nell'equazione $yy + 4ay - \frac{a^5 y}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$, da cui si ricava $yy + 3ay = 0$, cioè $y = 0$, ed $y = -3a$. Se nell'equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$, posto in luogo di u il divisore $+aa$, in oltre si ponga in luogo della y il zero, che è uno de' valori ritrovati, sarà $xx + aa = 0$, ma per questa non succede la divisione della proposta equazione, adunque si ponga in luogo

di

di y l'altro valore $-3a$, ed averemo $xx-3ax+aa=0$, per cui ſuccede la diviſione, dandoci di quoziente $x^3+axx+2aax-a^3=0$. Se l'operazione non foſſe ſucceduta per mezzo del diviſore $+aa$, averebbeſi provato il diviſore $-aa$; che ſe nè meno per queſto ſi aveſſe avuto l'intento, l'equazione ſarebbe, almeno con queſto metodo, irriducibile.

Sia l'equazione $x^5+ax^4 * +a^3xx-aabbx-a^4b=0$,
$-aabxx$

che ſi paragoni termine per termine col prodotto delle due ſolite ſuſſidiarie, e dal paragone de' ſecondi termini troveremo $t=a-y$; dal paragone degl'ultimi $z=-\frac{a^4b}{u}$; dal paragone de' quinti $fu+zy=-aabb$, e ſoſtituito in luogo di z il ſuo valore, ſarà $f=-\frac{aabb}{u}+\frac{a^4by}{uu}$; dal paragone de' terzi avremo $u+ty+f=0$, in cui poſti in luogo di t, e di f i loro valori, ſarà $yy-ay-\frac{a^4by}{uu}=u-\frac{aabb}{u}$. I diviſori di due dimenſioni di a^4b ſono $\pm aa$, $\pm ab$. Si tenti l'operazione per mezzo del diviſore $-ab$, e però poſto in luogo di u il valore $-ab$ nell'ultima equazione $yy-ay-\frac{a^4by}{uu}=u-\frac{aabb}{u}$, ſarà $yy-ay-\frac{aay}{b}=0$, e però $y=0$, ed $y=\frac{ab+aa}{b}$.

Si

Si sostituisca nell' equazione sussidiaria $xx+yx+u=0$ il valore $\frac{aa+ab}{b}$ in luogo di y, e $-ab$ in luogo di u, e sarà $xx+\frac{abx+aax}{b}-ab=0$, per cui non succede la divisione; si prenda adunque l'altro valore della y, cioè il zero, ed è l'equazione sussidiaria $xx-ab=0$, per cui succede la divisione dell'equazione proposta, dando di quoziente $x^3+axx+abx+a^3=0$.

Era arbitrario instituire il paragone de' quarti termini, ma per maggiore semplicità ô presi i terzi.

172. Le equazioni del sesto grado, supposte non riducibili per alcun divisore lineare, non lo potranno altresì essere, se non o per tre divisori di due dimensioni, o per uno di due, ed uno di quattro, o per due di tre, ma basterà cercare i due casi, ne' quali sono riducibili per due di tre, o per uno di due, ed uno di quattro; giacchè riducendole per uno di due, la ridotta sarà di quattro dimensioni, che si potrà poi ridurre per due divisori di due dimensioni, se la proposta è riducibile per tre di due dimensioni.

Sia l'equazione $x^6-13ax^5+45aax^4-71a^3x^3+57a^4xx-16a^5x+2a^6=0$, che si cerchi di ridurre per una di due dimensioni, ed una di quattro. Si prendano adunque le due sussidiarie $xx+yx+u=0$, ed $x^4+px^3+txx+fx+z=0$, e se ne faccia il prodotto

x^6+

$$\left.\begin{array}{l} x^6 + px^5 + tx^4 + fx^3 + zxx + zyx + zu \\ \quad yx^5 + pyx^4 + tyx^3 + fyxx + fux \\ \quad + ux^4 + pux^3 + tuxx \end{array}\right\} = 0;$$

dal paragone de' secondi termini caveremo $p = -13a - y$; dal paragone degl' ultimi $z = \frac{2a^6}{u}$; dal paragone de' terzi $t + py + u = 45aa$, e sostituendo il valore di p, sarà $t = 45aa + 13ay + yy - u$; dal paragone de' sesti $zy + fu = -16a^5$, e posto il valore di z, sarà $f = -\frac{2a^6y}{uu} - \frac{16a^5}{u}$; dal paragone de' quinti $z + fy + tu = 57a^4$, e sostituendo i valori di z, f, e t a fine di avere un equazione data per le sole u, y, e per le cognite dell' equazione proposta, sarà finalmente $\frac{2a^6}{u} - \frac{2a^6yy}{uu} - \frac{16a^5y}{u} + 45aau + 13ayu + uyy - uu = 57a^4$, cioè

$$yy - \frac{16a^5uy + 13au^3y + 2a^6u - 57a^4uu + 45aau^3 - u^4}{u^3 - 2a^6} = 0;$$

e poichè i divisori di due dimensioni dell' ultimo termine $2a^6$ sono $\pm aa$, $\pm 2aa$; si provi ponendo in quest' ultima equazione in luogo di u il divisore $+aa$, e sarà $yy + 3ay + 11aa = 0$, che risoluta ci dà $y = \frac{-3a \pm \sqrt{-35aa}}{2}$, quindi la formola sussidiaria $xx + yx + u = 0$ sarà $xx - \frac{3ax + x\sqrt{-34aa}}{2} + aa = 0$; ma per questa, comunque prendasi l' alternativa de' segni nel radicale, non è divi-

 sibile

ſibile la equazione propoſta, ſiccome nè pure rieſce prendendo il diviſore $-aa$; adunque ſi prenda $+2aa$, ed avremo $yy+12ay+20aa=0$, cioè $y=-6a\pm4a$, vale a dire $y=-10a$, ed $y=-2a$. Si prenda $y=-10a$, e ſi ponga nella formola ſuſſidiaria $xx+yx+u=0$ in luogo della y il valore $-10a$, e $+2aa$ in luogo di u, ſarà $xx-10ax+2aa=0$, ma per eſſa non ſuccede la diviſione della propoſta; onde ſi prenda l'altro valore della y, cioè $-2a$, e la formola è $xx-2ax+2aa=0$, per cui ſuccede la diviſione dandoci di quoziente

$$x^4-11ax^3+21aaxx-7a^3x+a^4=0.$$

Quì è il luogo di avvertire, che ſe in vece del paragone de' quinti termini, aveſſi preſo il paragone de' quarti, mi ſarei incontrata nell' equazione cubica $2y^3+26ayy+81aay+74a^3=0$, ed il paragone de' quinti mi â portata ad equazione quadratica, dal che ſi vede, che la ſcelta del paragone di tali termini piuttoſto, che d'altri, può recare molto vantaggio. Non è però, che non poteſſe ſervire anche l'equazione cubica $2y^3+26ayy+81aay+74a^3=0$, poichè ritrovando di queſta le radici, che ſono $y+2a=0$, $y+\frac{11a}{2}\pm\frac{\sqrt{47aa}}{2}=0$, una di queſte, cioè $y=-2a$ mi dà la medeſima equazione $xx-2ax+2aa=0$, per cui ſi divide la propoſta. Sia l'equazione del ſeſto grado

$$x^6+3ax^5+4aax^4+6a^3x^3+6a^4xx+3a^5x+2a^6=0$$

non riducibile per diviſore di due dimenſioni; ſi tenti

adun-

adunque la riduzione per due di tre, e si prendano le due equazioni sussidiarie $x^3 + yxx + px + u = o$,
$x^3 + txx + sx + z = o$,
e se ne faccia il prodotto

$$\begin{aligned} x^6 + yx^5 + px^4 + ux^3 + tuxx + suz + zu \\ + tx^5 + tyx^4 + ptx^3 + psxx + pzx \quad = o. \\ + sx^4 + syx^3 + zyxx \\ + zx^3 \end{aligned}$$

Dal paragone de' secondi termini caverassi $t = 3a - y$; dal paragone degl'ultimi $z = \frac{2a^6}{u}$; dal paragone de' sesti $su + pz = 3a^5$, e ponendo il valore di z, sarà $s = \frac{3a^5}{u} - \frac{2a^6 p}{uu}$; dal paragone de' terzi $p + ty + s = 4aa$, e sostituiti i valori di t, e di s, sarà $p = \frac{4aauu - 3a^5 u + uuyy - 3auuy}{uu - 2a^6}$; dal paragone de' quarti $u + pt + sy + z = 6a^3$, e sostituendo in luogo di t, s, z i loro valori a fine di avere un'altro valore di p dato per le y, u, e le note dell'equazione proposta, sarà $p = \frac{6a^3 uu - u^3 - 3a^5 uy - 2a^6 u}{3auu - uuy - 2a^6 y}$.

Tra questi due valori di p s'instituisca un'equazione per ricavarne il valore della y dato per le sole u, e le cognite, ed è

$$\frac{4aauu - 3a^5 u - 3auuy + uuyy}{uu - 2a^6} = \frac{6a^3 uu - u^3 - 3a^5 uy - 2a^6 u}{3auu - uuy - 2a^6 y},$$

e riducendo al comune denominatore, ed ordinando l'e-

quazione per la y, sarà

$$\frac{\begin{array}{llll} y^3 & -6a^7uyy + 8a^8uy & -6a^3u^3 & \\ & -6au^3yy - 6a^5uuy & +9a^6uu & \\ & +13aau^3y & -12a^9u & =0\,. \\ & & +4a^{12} & \\ & & -u^4 & \end{array}}{u^3 + 2a^6u}$$

E perchè si â $uz = 2a^6$, sarà u un divisore di $2a^6$; ma i divisori di tre dimensioni di $2a^6$ sono $\pm a^3$, $\pm 2a^3$; quindi preso uno di essi, cioè $+a^3$ in luogo di u, si ponga nell'ultima equazione, ed averassi $y^3 - 4ayy + 5aay - 2a^3 = 0$. Da questa si cavino i valori della y, cioè uno $y = 2a$, e gl'altri due, che sono eguali, $y = a$. Si faccia uso del primo valore $y = 2a$, che sostituito in una delle equazioni di p in luogo di y, e posto in luogo di u il divisore a^3, sarà $p = aa$, quindi posti questi valori di y, p, ed u nella formola sussidiaria $x^3 + yxx + px + u = 0$, sarà essa $x^3 + 2axx + aax + a^3 = 0$, per cui divisa l'equazione proposta ci dà il quoziente $x^3 + axx + aax + 2a^3 = 0$. Se la divisione non fosse succeduta prendendo $y = 2a$, averei preso $y = a$. Che se nè meno per questo avessi avuto l'intento, avrei tentato per mezzo di ciascuno degl'altri divisori, ripetendo le medesime operazioni; e se per nessuno fosse riuscita la facenda, la proposta equazione non avrebbe potuto abbassarsi, almeno con questo metodo, e sarebbe rimasta del sesto grado.

Sia

Sia l'equazione $x^6 + ax^5 + aax^4 + 3a^3x^3 + a^4xx + a^5x + 2a^6 = 0$, che si paragoni col prodotto delle due sussidiarie, come nell'esempio antecedente. Dal paragone de' secondi termini averemo $t = a - y$; dal paragone degl'ultimi $z = 2a^6$; dal paragone de' sesti $su + \frac{pz}{u} = a^5$, e posto in luogo di z il suo valore, sarà $s = \frac{a^5}{u} - \frac{2a^6p}{uu}$; dal paragone de' terzi $p + ty + s = aa$, e posti i valori di t, e di s, $p = \frac{aauu - auuy + uuyy - a^5u}{uu - 2a^6}$; dal paragone de' quarti $u + pt + sy + z = 3a^3$, e sostituiti i valori di z, s, t per avere un'altra equazione di p data per le sole u, y, e le note, sarà $p = \frac{3a^3uu - a^3uy - 2a^6u - u^3}{auu - uuy - 2a^6y}$, ed instituendo fra questi valori di p un'equazione per avere il valore della y dato per la sola u, e le cognite, fatte le debite operazioni, sarà

$$y^3 \; \frac{\begin{array}{r} -2au^3yy + 2aau^3y + 2a^3u^3 \\ -2a^7uyy - 2a^5uuy + a^6uu \\ +2a^8uy - 6a^9u \\ -u^4 \\ +4a^{12} \end{array}}{u^3 + 2a^6u} = 0.$$

I divisori di tre dimensioni di $2a^6$ sono $\pm a^3$, $\pm 2a^3$. Si prenda in luogo di u il divisore $+a^3$, che si ponga in quest' ultima equazione, e si riduce ad esse-

re

re $y^3 \frac{-4a^{10}yy + 2a^{11}y}{3a^9} = 0$, e dividendo per y, ſarà $y = 0$, ed $\frac{yy - 4ay + 2aa}{3} = 0$, cioè $y = \frac{2a \pm \sqrt{-2aa}}{3}$. Di queſti tre valori della y ſi prenda il primo, cioè $y = 0$, e ſi ſoſtituiſca in luogo di y in una delle due equazioni di p, ed a^3 in luogo di u, e ſarà $p = 0$; adunque l'equazione ſuſſidiaria $x^3 + yxx + px + u = 0$ ſarà $x^3 + a^3 = 0$, per cui diviſa l'equazione propoſta ci dà di quoziente $x^3 + axx + aax + 2a^3 = 0$.

In queſte tali equazioni ſe prima ſi ſapeſſe, che ſono diviſibili per un diviſore, in cui manchi qualche termine, ſi potrebbe riſparmiare molta fatica col prendere una delle due equazioni ſuſſidiarie mancante pure dello ſteſſo termine, ma poichè ciò non ſi ſa, ſi ſuole provare l'operazione primieramente con una di eſſe equazioni ſuſſidiarie mancante o d'uno, o di un'altro, o di più termini; tuttavia però, perchè l'opera è gettata ſe la propoſta equazione non è in queſto modo riducibile, e biſogna in fine, ciò non oſtante, ricorrere alle equazioni ſuſſidiarie compite, è meglio ſervirſi di queſte ſul bel principio, giacchè ci danno i diviſori per l'uno, e l'altro caſo.

Senza ripetere le operazioni ad ogni eſempio avrei potuto formare il canone generale, a cui rapportare ogni particolare equazione in ſimil guiſa a quello del num.

num. 168., ma oltre che ciò suole cagionare della confusione, pare, che le attuali operazioni fatte in proposito diano maggior lume, e facciano migliore effetto, quindi ad esse piuttosto mi sono attenuta.

173. Lo stesso metodo si può proporzionalmente applicare alle equazioni di grado superiore, ma il calcolo cresce a dismisura, perchè se si debba ridurre un' equazione, per esempio, dell'ottavo grado per mezzo di due del quarto, nelle quali non manca alcun termine, ciascuna delle due equazioni sussidiarie avrà quattro indeterminate, onde considerata una di queste equazioni, come sarebbe $x^4 + yx^3 + pxx + qx + u = 0$, e preso per la u uno de' divisori dell'ultimo termine della proposta, rimangono tre indeterminate y, p, q da fissarsi coi soliti paragoni, nel che s'incontrano equazioni solide, delle quali però avendosi le radici, l'operazione può procedere.

PROBLEMA I.

174. *Ritrovare quattro numeri, i quali si superino dell'unità, ed il prodotto loro sia* 100.

Sia il primo numero $= x$, il secondo sarà $= x + 1$, il terzo $= x + 2$, il quarto $= x + 3$; adunque dovrà essere il prodotto loro $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x = 100$, cioè $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x - 100 = 0$; e perchè questa equazione

zione non è divisibile per alcun divisore dell'ultimo termine, si faccia sparire il secondo con la sostituzione di $x = z - \frac{3}{2}$, e nasce l'equazione $z^4 - \frac{5zz}{2} - \frac{1591}{16} = 0$, che è quadratica affetta, le di cui radici sono $zz = \frac{5}{4} \pm \sqrt{101}$, e però $z = \pm \sqrt{\frac{5}{4} \pm \sqrt{101}}$, quindi averassi $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} \pm \sqrt{101}}$; e però de' quattro valori della x due sono reali, cioè $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$, gli altri due immaginarj. Se ne prenda uno reale $-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ per il primo numero de' quattro cercati; sarà $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il secondo; $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il terzo; $\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il quarto; il prodotto de' quali è $= 100$. Si prenda l'altro valore reale di x cioè $-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ per il primo numero; sarà $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il secondo; $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il terzo; $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il

quar-

quarto, il prodotto de' quali dà parimente il numero 100.

PROBLEMA II.

175. *Nel triangolo rettangolo* ABC *dato il lato minore* AB, (*Fig.* 91.) *ed abbassato il perpendicolo* BD *alla base* AC, *e data la differenza de' segmenti* AD, DC *della stessa base* AC; *ritrovare la differenza* FC *de' lati* BA, BC.

Col centro B, intervallo BA, si descriva il circolo $AEFG$, e sia $BA=a$, $EC=b$, differenza data de' segmenti AD, DC, e sia FC differenza cercata $=x$; sarà. $GC=2a+x$, e per la proprietà del circolo, $GC\times CF=AC\times CE$, cioè $2ax+xx=AC\times b$, e però $AC=\frac{2ax+xx}{b}$; ma essendo retto l'angolo ABC, avrassi l'equazione $\frac{4aaxx+4ax^3+x^4}{bb}=2aa+2ax+xx$, o sia

$$x^4+4ax^3+4aaxx-2abbx-2aabb=0 \atop \qquad\qquad\quad -bbxx$$

, la quale non è divisibile per alcun divisore dell'ultimo termine, e però si levi il secondo termine, facendo $x=z-a$, ed avrassi la quadratica affetta

$$z^4-2aazz+a^4=0, \atop \quad -bbzz\ -aabb$$

quindi

di $zz = \frac{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}{2}$, e $z = \pm \sqrt{\frac{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}{2}}$,

onde $x = -a \pm \sqrt{\frac{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}{2}}$, o sia

$x = -a \pm \sqrt{aa + \frac{bb}{2} \pm b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$; quattro radici tutte reali, quando sia a maggiore di b. La radice $x = -a + \sqrt{aa + \frac{bb}{2} + b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$, che è positiva, serve per il problema proposto; la radice $x = -a + \sqrt{aa + \frac{bb}{2} - b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$, che è negativa, serve quando il lato BC sia minore del lato AB; le altre due servono per l'angolo ABG.

PROBLEMA III.

176. *Dato il quadrato* AD, (*Fig.* 92.) *ritrovare nel lato prodotto* AC *il punto* E *tale, che condotta all' angolo* B *la retta* EB, *sia l'intercetta* EF *eguale ad una data retta linea* c.

Chiamata $BD = a$, $DF = x$, sarà $CF = a - x$, e condotta BFE, sia $FE = c$; per la similitudine de' trian-

goli

goli ECF, BDF, sarà CF $(a-x)$, FE (c) :: FD (x), FB $\left(\frac{cx}{a-x}\right)$; ma per l'angolo retto D sarà anche $FB=\sqrt{aa+xx}$, adunque averassi l'equazione $\sqrt{aa+xx}=\frac{cx}{a-x}$, e quadrando, $\frac{ccxx}{aa-2ax+xx}=aa+xx$, e riducendo al comune denominatore, ed ordinando l'equazione, sarà $x^4-2ax^3+2aaxx-2a^3x+a^4=0$, le di
$-ccxx$
cui radici si è veduto ai numeri 167., e 170., essere

$$x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}\pm\sqrt{\frac{cc}{4}-\frac{aa}{2}-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

$$x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}\pm\sqrt{\frac{cc}{4}-\frac{aa}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Le due ultime radici sono sempre reali, e positive, l'una $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{\frac{cc}{4}-\frac{aa}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, che è minore di a, ci determina il punto F, per cui condotta la linea BE, sarà EF eguale alla data c, e sciolto il problema proposto. L'altra radice $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{\frac{cc}{4}-\frac{aa}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, che è maggiore di a, determina il punto f; a cui condotta la retta Bf, ci dà pure ef eguale alla data, e serve se il problema fosse stato proposto per l'angolo ACf.

Le due prime radici sono immaginarie, qualunque volta sia cc minore di $8aa$, ed il problema impossibile. Posta adunpue cc non minore di $8aa$, le due radici sono reali, e negative, quindi presa $DG = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{aa}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, e $Dg = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{aa}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, e condotte per lo punto B le rette GM, gm, saranno esse ambe eguali alla data c; e servirebbero, se il problema fosse stato proposto per l'angolo ACD.

177. Molte volte quando il problema non è di natura sua solido, ma piano, se ci comparisce sotto un' equazione solida ponendo per incognita una tal linea, ci può comparire sotto equazione piana prendendo altra linea per incognita. Ne prendo un'esempio nel problema antecedente, in cui denominando $DF = x$, si è ritrovata un' equazione del quarto grado, per cui si â dovuto fare la fatica di ridurla. Ma se supponendo E il punto cercato, (*Fig.* 93.) si condurrà ER normale a BE, che incontri in R la BD prodotta, ed EL normale a BR, e chiamerassi $DR = x$, e come sopra $BD = a$, $FE = c$, e $BF = y$, altra incognita da eliminarsi in appresso, sarà $BR = a + x$, $BE = c + y$. Ora per i triangoli simili BDF, ELR, sarà $ER = y$, perchè è $EL = CD = BD$; e per i trian-

triangoli ſimili BRE, ERL, ſarà BR, BE::ER, EL, adunque ſarà $a+x$, $c+y$::y, a; quindi $cy+yy=aa+ax$. Ma per l'angolo retto BER, il quadrato di BR è eguale alla ſomma de' quadrati di BE, e di ER, cioè $aa+2ax+xx=2yy+2cy+cc$, dunque ponendo in luogo di $cy+yy$ il valore $aa+ax$, ſarà l'equazione $aa+2ax+xx=2aa+2ax+cc$, cioè $x=\pm\sqrt{aa+cc}$.

In un' altro modo ancora. Diviſa per metà la FE in H, e chiamata $CD=a$, ſia $2c$ la data linea, a cui deve eſſere eguale la FE, e ſi chiami $BH=x$, ſarà $BF=x-c$, e $BE=x+c$; ma $\overline{BE}^2-\overline{AB}^2=\overline{AE}^2$, dunque ſarà $AE=\sqrt{xx+2cx+cc-aa}$. Ora per i triangoli ſimili BDF, BEA, ſarà BF $(x-c)$, BD (a) :: $BE(x+c)$, $AE(\sqrt{xx+2cx+cc-aa})$, quindi $ax+ac=\overline{x-c}\sqrt{xx+2cx+cc-aa}$, e quadrando, ed ordinando l'equazione, ſarà finalmente

$$\left.\begin{matrix} x^4 - 2aaxx - 2aacc \\ - 2ccxx + c^4 \end{matrix}\right\} = 0,$$

quadratica affetta, le di cui quattro radici ſono

$$x = \pm\sqrt{aa+cc\pm a\sqrt{aa+4cc}}.$$

Iſteſſamente ſe nel problema II. num. 175. in luogo di fare $FC=x$, (*Fig.* 91.) aveſſi denominata $BC=x$, ripetendo lo ſteſſo diſcorſo, avrei ritrovata l'equazione

$$\left.\begin{matrix} x^4 - 2aaxx + a^4 \\ - bbxx - aabb \end{matrix}\right\} = 0,$$

qua-

quadratica affetta, le di cui radici sono

$x = \pm \sqrt{aa + \frac{bb}{2} \pm b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$, che convengono con le prime.

Anco più semplicemente, ponendo $AE = x$, e ripetendo lo stesso discorso, avrebbesi avuta l'equazione $xx + bx = 2aa$, e però $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}$, e perchè avrebbesi trovata l'espressione $-a + \sqrt{bb + 2bx + xx - aa}$ per la FC; ponendo in luogo di x il valore ritrovato, sarebbesi avuta la ricercata

$FC = -a + \sqrt{aa + \frac{bb}{2} \pm b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$, come prima.

178. Un' altro artifizio si può tentare per simili problemi, quando ci portano a equazione solida, e che però tali non sono di natura sua; ed è, ritenuta la stessa linea per incognita, per cui si è ritrovata la prima equazione, per mezzo d'altre proprietà ritrovare una seconda equazione, ed eguagliare l'una all'altra; dal paragone delle quali nascerà una terza di grado inferiore. Eccone un' esempio nel seguente problema.

PRO-

PROBLEMA.

179. *Inscrivere in un dato circolo un settangolo.*

Sia (*Fig.* 94.) il dato circolo $ABFGCDE$, il di cui centro H, raggio $HA = r$, ed il lato del settangolo sia $AB = BF = FG$ ec. $= x$. Divisa per metà AB in I, sarà $AI = \frac{1}{2}x = IB$, e condotta IC, che passerà necessariamente per lo centro H, sarà $HI = \sqrt{rr - \frac{xx}{4}}$, $CI = r + \sqrt{rr - \frac{xx}{4}}$, $CB = \sqrt{2rr + 2r\sqrt{rr - \frac{xx}{4}}}$. Si tirino CE, ed HD, saranno simili i triangoli CDK, HAI, a cagione dei due angoli retti CKD, HIA, e degl'angoli DCK, AHI, il primo de' quali, perchè insiste all'arco DE, sarà doppio dell'angolo ACI, che insiste alla metà di DE, e però eguale all'angolo AHI doppio dello stesso ACI; e però avremo per la similitudine di essi triangoli, $CK = \frac{x\sqrt{rr - \frac{xx}{4}}}{r} = \frac{\sqrt{4rrxx - x^4}}{2r}$, $CE = \frac{\sqrt{4rrxx - x^4}}{r}$, ed $HK = \sqrt{rr - \frac{4rrxx + x^4}{4rr}} = \frac{2rr - xx}{2r}$; ma sono simili i triangoli CEN, CHK, essendo retti i due angoli K, N, ed eguali i due angoli KCH, CEN, perchè insistenti a due seg-

segmenti eguali, dunque sarà $CN = \frac{\overline{2rr - xx}\sqrt{4rrxx - x^4}}{2r^3}$, e $CB = \frac{\overline{2rr - xx}\sqrt{4rrxx - x^4}}{r^3}$, e però l'equazione

$$\sqrt{2rr + r\sqrt{4rr - xx}} = \frac{\overline{2rr - xx}\sqrt{4rrxx - x^4}}{r^3}.$$

Quadrando adunque, sarà $2rr + r\sqrt{4rr - xx} = \frac{\overline{4r^4 - 4rrxx + x^4} \times \overline{4rrxx - x^4}}{r^6}$, e di nuovo quadrando, ed ordinando, avrassi $x^{14} - 16rrx^{12} + 104r^4x^{10} - 352r^6x^8 + 660r^8x^6 - 672r^{10}x^4 + 336r^{12}xx - 63r^{14} = 0$; ma quest' equazione è divisibile per $xx - 3rr = 0$. Fatta pertanto la divisione, avremo $x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8x^4 - 105r^{10}xx + 21r^{12} = 0$, la quale non è divisibile per alcun divisore di due dimensioni, quindi pare che il problema sia del duodecimo grado. Sciolgo adunque il problema in altro modo, ritenendo la medesima incognita $x = AB = BF$ ec. Poichè nei triangoli HCD, CDL l'angolo CDH è comune, e l'angolo alla circonferenza DCL, che insiste all'arco DA, è eguale all'angolo al centro DHC, che insiste all'arco CD metà di DA, saranno simili essi triangoli, e però avremo $DL = \frac{xx}{r}$, $LH = r - \frac{xx}{r}$. Ma l'angolo $DLC = DCH = EDH$, dunque l'angolo HLM, che è eguale all'angolo

lo al vertice DLC, sarà eguale all'angolo EDH, onde saranno parallele le due rette LM, DE, e simili i triangoli HLM, HDE, e però sarà $LM = \frac{rrx - x^3}{rr}$, ma $CL = CD = x$, (essendo il triangolo LDC simile al triangolo isoscele HDC) e $CL = MA$, per essere eguali gl' angoli HLC, HMA, e però simili, ed eguali i triangoli HLC, HMA; dunque $CA = 2x + \frac{rrx - x^3}{rr}$, e perchè $CA = CB$, sarà l'equazione $\frac{3rrx - x^3}{rr} = \sqrt{2rr + r\sqrt{4rr - xx}}$, e quadrando, $9r^4xx - 6rrx^4 + x^6 = 2r^6 + r^5\sqrt{4rr - xx}$; e di nuovo quadrando, ed ordinando l'equazione,

$$x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0.$$

Ed eccomi giunta ad un'altra equazione, la quale, perchè di grado inferiore alla prima, si dovrà moltiplicare per tanta potestà dell'incognita, quanta è necessaria, acciò divenga dello stesso grado, e con essa si possa paragonare; moltiplicandola adunque per xx, sarà

$$x^{12} - 12rrx^{10} + 54r^4x^8 - 112r^6x^6 + 105r^8x^4 - 35r^{10}xx = x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8x^4 - 105r^{10}xx + 21r^{12},$$

e sottratta la prima dalla seconda, sarà

$$x^{10} - 11rrx^8 + 45r^4x^6 - 84r^6x^4 + 70r^8xx - 21r^{10} = 0,$$

 la

la quale, perchè è del decimo grado, paragonata colla seconda equazione di sopra ritrovata

$x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0$,

e da essa sottratta, sarà

$x^8 - 9rrx^6 + 28r^4x^4 - 35r^6xx + 14r^8 = 0$, che è divisibile per $xx - 2rr$, e fatta la divisione, avremo finalmente l'equazione del sesto grado

$x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0$.

Ho tenuta questa strada, per far vedere l'uso del metodo; per altro sarei giunta più presto alla stessa equazione, se avessi paragonati fra loro i due valori del quadrato di CA ritrovati nelle due diverse soluzioni del problema, cioè $\frac{16r^6xx - 20r^4x^4 + 8rrx^6 - x^8}{r^6}$ della prima, e $\frac{9r^4xx - 6rrx^4 + x^6}{r^4}$ della seconda; imperciocchè fatta l'equazione fra questi due valori, e tolti i termini, che si elidono; sarà $x^8 - 7rrx^6 + 14r^4x^4 - 5r^6xx = 0$, e dividendo per xx, $x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0$, come sopra. Si poteva anche più brevemente dividere l'equazione da prima ritrovata $x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8x^4 - 105r^{10}xx + 21r^{12} = 0$ per $x^6 - 6rrx^4 + 9r^4xx - 5r^6 = 0$, o la seconda $x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0$, per $x^4 - 5rrxx + 5r^4 = 0$, e nell'uno, e nell'altro caso avrebbesi ritrovato $x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0$.

Non

Non è però del sesto grado il proposto problema, sebbene tale apparisce, non ostante la usata industria; per vederlo, ritenuta la stessa composizione di figura, si denomini $HI = x$, sarà $AI = \sqrt{rr - xx} = IB$, $CI = r + x$, $CB = \sqrt{rr + 2rx + xx + rr - xx} = \sqrt{2rr + 2rx}$. Indi ripetendo lo stesso discorso di sopra, si avrà $CK = \frac{2x\sqrt{rr - xx}}{r}$; $HK = \sqrt{\frac{r^4 - 4rrxx + 4x^4}{rr}} = \frac{rr - 2xx}{r}$; $CE = 2CK = \frac{4x\sqrt{rr - xx}}{r}$; $CN = \frac{4rrx - 8x^3}{r^3}\sqrt{rr - xx}$; $CB = 2CN = \frac{8rrx - 16x^3}{r^3}\sqrt{rr - xx}$. Ma si è anco trovato $CB = \sqrt{2rr + 2rx}$; dunque sarà l'equazione

$$\sqrt{2rr + 2rx} = \frac{8rrx - 16x^3}{r^3}\sqrt{rr - xx}.$$

Cerco altra equazione in maniera diversa, ma ritenendo la stessa $HI = x$ per incognita; per lo stesso discorso di sopra, sarà $DL = \frac{4rr - 4xx}{r}$; $LH = r - \frac{4rr + 4xx}{r} = \frac{4xx - 3rr}{r}$; $LM = \frac{2\sqrt{rr - xx}}{rr} \times \overline{4xx - 3rr}$; $CA = 4\sqrt{rr - xx} + \frac{2\sqrt{rr - xx}}{rr} \times \overline{4xx - 3rr}$, cioè riducen-

do, $CA = \frac{8xx - 2rr\sqrt{rr - xx}}{rr} = CB$; e però $\sqrt{2rr + 2rx} = \frac{8xx - 2rr\sqrt{rr - xx}}{rr}$, e finalmente, egua-gliando gl' omogenei di comparazione dell' una, e dell' altra equazione, sarà

$\frac{8rrx - 16x^3\sqrt{rr - xx}}{r^3} = \frac{8xx - 2rr\sqrt{rr - xx}}{rr}$, la quale equazione ridotta viene ad essere $8x^3 + 4rxx - 4rrx - r^3 = 0$, del terzo grado.

180. Messi in opra i soprascritti metodi, se le equazioni non possono abbassarsi, e rimangono di grado superiore al secondo, in due maniere si può procedere per la soluzione de' problemi, che riescono solidi, o più che solidi. Una maniera, che è di pochissimo uso, riguarda le sole equazioni del terzo, e quarto grado, e consiste nel risolverle, sviluppando i valori analitici dell' incognita, che ci si presenteranno però sotto radici cube, e chiamasi *la Regola di Cardano*. La seconda generalissima, e di moltissimo uso consiste nel ritrovare i valori geometrici dell' incognita col mezzo delle intersezioni di certe curve opportunamente introdotte nell' equazione, e così costruire il problema proposto.

181. E per cominciare dalla risoluzione analitica, suppongo, che le equazioni manchino del secondo termine, tali potendosi sempre ridurre, se non lo sono. Tutte

le

le equazioni del terzo grado mancanti del ſecondo termine ſono compreſe ſotto queſte quattro canoniche.

I. $x^3 - px - q = 0$. II. $x^3 + px - q = 0$.
III. $x^3 - px + q = 0$. IV. $x^3 + px + q = 0$.

Si faccia $x = y + z$, e però $px = py + pz$, ed $x^3 = y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3$, e ſoſtituiti queſti valori riſpetto alla prima equazione, ſarà eſſa $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 - py - pz - q = 0$; di queſta ſe ne formino due, cioè $3yyz + 3zzy = py + pz$, ed $y^3 + z^3 = q$, dalla prima ſi ricava, dividendo per $y + z$, $3yz = p$, cioè $y = \frac{p}{3z}$, che ſoſtituito nella ſeconda darà $\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = q$, o ſia $z^6 - qz^3 = -\frac{p^3}{27}$, e per le regole delle quadratiche affette, $z^6 - qz^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}$, e $z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$; e finalmente $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$. Nella eſtrazione della radice quadrata ô preſo il ſolo ſegno poſitivo, perchè il negativo nulla varia, e dà in fine la ſteſſa quantità del poſitivo per il valore della x, come ſi potrà vedere facendone il calcolo; il che s'intenda ſimilmente riguardo all'altre tre equazioni canoniche. Ma $y^3 + z^3 = q$, ſarà adunque $y^3 = q - \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$, e però $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$;

ma

ma in oltre si è fatta $x = y + z$, sarà adunque $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, giacchè l'alternativa de' segni ommessa nulla varia.

182. La seconda equazione $x^3 + px - q = 0$, fatte le stesse sostituzioni, sarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 + py + pz - q = 0$. Si formino le due equazioni $3yyz + 3zzy = -py - pz$, ed $y^3 + z^3 = q$; dalla prima si ricava $3yz = -p$, cioè $y = -\frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = q$, o sia $z^6 - qz^3 = \frac{p^3}{27}$, e però $z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}$, e $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, ma $y^3 + z^3 = q$, adunque $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, ed $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$.

183. La terza equazione $x^3 - px + q = 0$, fatte le sostituzioni, sarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 - py - pz + q = 0$. Si formino le due equazioni $3yyz + 3zzy = py + pz$, ed $y^3 + z^3 = -q$; dalla prima si ricaverà $3yz = p$, cioè $y = \frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = -q$,

o sia

o sia $z^6 + qz^3 = -\frac{p^3}{27}$, e però $z^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$,

e $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$; ma $y^3 + z^3 = -q$, adunque $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, e finalmente $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$.

184. La quarta equazione $x^3 + px + q = 0$, fatte le sostituzioni, sarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 + py + pz + q = 0$. Formo le due equazioni $3yyz + 3zzy = -py - pz$, ed $y^3 + z^3 = -q$; dalla prima si avrà $3yz = -p$, cioè $y = -\frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = -q$, o sia $z^6 + qz^3 = \frac{p^3}{27}$, e però $z^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}$,

e $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, ma $y^3 + z^3 = -q$, adunque $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, e finalmente $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$.

185. Le stesse radici, o formole si avranno ponen-

do

do $x = z \pm \frac{p}{3z}$, cioè $+\frac{p}{3z}$, se nell'equazione è $-px$, e $-\frac{p}{3z}$, se nell'equazione è $+px$; quindi $x^3 = z^3 \pm pz + \frac{pp}{3z} \pm \frac{p^3}{27z^3}$. Fatte adunque le sostituzioni nella prima equazione canonica $x^3 - px - q = 0$, sarà essa $z^3 + \frac{p^3}{27z^3} - q = 0$, cioè $z^6 - qz^3 = -\frac{p^3}{27}$, e $z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$, e finalmente $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$; adunque, poichè si è posto $x = z + \frac{p}{3z}$, sarà

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}}.$$

Per ridurre questa alla stessa espressione ritrovata nella prima maniera, basta moltiplicare il numeratore, e denominatore del secondo termine dell' omogeneo di comparazione per $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, e sarà esso $\frac{p\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{\frac{p^3}{27}}}$, cioè $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, e

però

però $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$,

come prima.

La radice per la seconda equazione $x^3 + px - q = 0$

sarebbe $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}}$,

e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell'omogeneo di comparazione per

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, sarà

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$,

come prima.

La radice per la terza equazione $x^3 - px + q = 0$

sarebbe $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}}$,

e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell' omogeneo di comparazione per

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, sarà

$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$,

come prima.

La radice per la quarta equazione $x^3 + px + q = 0$ sarebbe $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}}$, e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell' omogeneo di comparazione per $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, sarà

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}},$$

come prima.

186. E' chiaro a vedersi, che i valori ritrovati dell' incognita x colla prima sostituzione $x = y + z$ esiggono l'estrazione di due diverse radici cube, la dove i secondi avuti con la sostituzione $x = z \pm \frac{p}{3z}$ richieggono l'estrazione d'una sola; e che il valore per la seconda, e quarta equazione canonica ci comparirà sempre sotto forma reale, perchè la quantità sotto il vincolo radicale quadratico è tutta positiva; ma quello della prima, e terza sarà sotto forma reale, se sia $\frac{1}{4}qq$ maggiore di $\frac{p^3}{27}$, e sotto forma immaginaria, quando sia $\frac{1}{4}qq$ minore di $\frac{p^3}{27}$, (e questo chiamasi il caso irreducibile) ma ciò nulla ostante non è

però,

però, ch'egli non sia reale; anzi tutti e tre i valori della prima, e terza equazione, quando sia $\frac{1}{4}qq$ minore di $\frac{p^3}{27}$, sono reali; siccome essendo $\frac{1}{4}qq$ maggiore di $\frac{p^3}{27}$ nella prima, e terza equazione, e generalmente nella seconda, e quarta, le sole radici o valori così ritrovati sono reali, gli altri due sono immaginarj.

E quanto alla seconda, e quarta equazione, ciò è già stato dimostrato al num. 152. avendo esse il terzo termine positivo. Rispetto poi alla prima, e terza, cioè quando il terzo termine è negativo, abbia ciascuna di esse le tre radici reali, che sieno a, $-b$, $-c$, o pure $-a$, $+b$, $+c$, e poichè manca il secondo termine, come si suppone, sarà $a=b+c$, e l'equazione per tanto, che nasce da tali radici, sarà di questa forma

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - bbx \pm bc \times \overline{b+c} \\ \quad\;\; - bcx \\ \quad\;\; - ccx \end{array}\right. = 0.$$

Essendo b, c quantità reali, sarà $\overline{b-c}^2$ quantità positiva, e perciò, se si ponga $bb - 2bc + cc = D$, sarà anco $bb + bc + cc = D + 3bc$, e $\frac{\overline{bb+bc+cc}^3}{27} = \frac{D^3}{27} + \frac{DDbc}{3} + Dbbcc + b^3c^3$; ma sarà inoltre $bb + 2bc + cc$, cioè $\overline{b+c}^2 = D + 4bc$, e però $\frac{bbcc \times \overline{b+c}^2}{4} = \frac{Dbbcc}{4} + b^3c^3$; e $\frac{D^3}{27} + \frac{DDbc}{3} + Dbbcc + b^3c^3$

 è

è maggiore di $\frac{Dbbcc + b^3c^3}{4}$; adunque sarà anche maggiore di $\frac{bbcc \times \overline{b+c}^2}{4}$, e però $\frac{\overline{bb+bc+cc}^3}{27}$ maggiore di $\frac{bbcc \times \overline{b+c}^2}{4}$, cioè il cubo preso positivo della terza parte del coefficiente del terzo termine maggiore del quadrato della metà dell' ultimo, cioè $\frac{p^3}{27}$ maggiore di $\frac{1}{4}qq$. Adunque se essendo le radici tutte reali, il terzo termine è sempre negativo, ed in oltre $\frac{p^3}{27}$ è maggiore di $\frac{qq}{4}$; quando altrimenti si trovi vi saranno due radici immaginarie, il che ec.

Ritrovato nella suddetta maniera un valore per ciascuna equazione, si avranno gli altri due col dividere per questo valore l'equazione proposta, poichè il quoziente sarà un' equazione del secondo grado, che si potrà sempre risolvere.

187. Potrebbesi però anche, se più torna comodo, risparmiare il tedio della divisione riflettendo, che siccome tre sono le radici cube dell'unità, cioè 1, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, così intendendosi qualunque

quantità, per esempio $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}$, moltiplicata nell'unità, le tre di lei radici cube saranno

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\overline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}}\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\overline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}}\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$$; quindi le tre radici cube della prima equazione $x^3 - px - q = 0$ saranno, ordinandole però debitamente, le seguenti

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}\ \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}\ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

ed in fatti facendo il prodotto delle radici tra loro, e ponendo per brevità $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} = m$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} = n$, il prodotto dell'ultima $x + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times m + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times n$ nella seconda $x + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times m + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times n$ sa-

rà

rà $xx+mx+nx+mm-mn+nn$, che moltiplicato nella prima $x-m-n$ darà $x^3-3mnx-m^3-n^3$, e restituendo i valori di m, e di n, sarà finalmente $x^3-px-q=0$, equazione proposta. Nè differentemente si proceda per l'altre equazioni.

188. Ritrovate le accennate formole generali, per applicarle all'uso particolare di equazioni date, basterà paragonare la proposta equazione con la corrispondente delle quattro canoniche, per avere indi il valore della q, e della p, i quali sostituiti nella formola ci daranno le ricercate radici.

Sia l'equazione $x^3+2aax-9a^3=0$; la corrispondente delle quattro canoniche sarà la seconda $x^3+px-q=0$, adunque sarà $p=2aa$, $q=9a^3$, onde facendo la sostituzione di questi valori in luogo di p, e di q nella espressione generale della radice di essa seconda equazione, cioè in

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\frac{p^3}{27}}},$$

sarà $x=\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}+\sqrt{\frac{81a^6}{4}+\frac{8a^6}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}-\sqrt{\frac{81a^6}{4}+\frac{8a^6}{27}}}$,

o sia $x=\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}+\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}-\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}}$,

e l'al-

e l'altre due saranno

$$x = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}+\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}-\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}},$$

$$x = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}+\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}-\sqrt{\frac{2210a^6}{108}}},$$

il prodotto delle quali restituisce la proposta equazione.

189. Ma anche senza rapportare le particolari equazioni alle formole generali, si possono esse indipendentemente risolvere, facendo uso della data regola. Così per l'equazione $x^3 + 2aax - 9a^3 = 0$, fatta $x = y + z$, sarà $2aax = 2aay + 2aaz$, ed $x^3 = y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3$, e sostituiti questi valori nella proposta equazione, sarà mutata in quest'altra $y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 + 2aay + 2aaz - 9a^3 = 0$, di questa se ne formino due, cioè $3zyy + 3zzy = -2aay - 2aaz$, ed $y^3 + z^3 = 9a^3$; dalla prima, dividendo per $y + z$, caverassi $3zy = -2aa$, cioè $y = -\frac{2aa}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $-\frac{8a^6}{27z^3} + z^3 = 9a^3$, o sia $z^6 - 9a^3z^3 = \frac{8a^6}{27}$, e però $z^3 = \frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}$, e $z = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}}$; ma $y^3 + z^3 = 9a^3$, adunque $y^3 = \frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}$, e però $y = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}}$; ma $y + z = x$,

adun-

adunque $x = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}}$, la ſteſſa come ſopra.

Sia l'equazione $z^3 + 3azz - 5aaz + 2a^3 = 0$. Si levi il ſecondo termine, facendo $z = x - a$, e viene $x^3 - 8aax + 9a^3 = 0$. Riferita queſta alla terza canonica, avremo $p = 8aa$, $q = 9a^3$, quindi ſoſtituiti queſti valori nella formola generale per la radice, ſarà

$$x = \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} - \frac{512a^6}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} - \frac{512a^6}{27}}},$$

cioè $x = \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}}}$,

e l'altre due

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}}} - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}}},$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}}} - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}}}$$

e perchè ſi è fatta $z = x - a$, ſottraendo la quantità a da ciaſcuna delle tre ritrovate radici, ſi avranno le radici della propoſta equazione $z^3 + 3azz - 5aaz + 2a^3 = 0$.

Sia l'equazione $x^3 - 9aax + 2a^3 = 0$. La corriſpondente delle quattro canoniche ſarà la terza $x^3 - px + q = 0$; adunque ſarà $p = 9aa$, $q = 2a^3$, onde facendo la ſoſtituzione di queſti valori in luogo di p, e di q nell'eſpreſ-

ſione

ſione generale della radice di eſſa terza equazione, ſarà $x = \sqrt[3]{-a^3 + \sqrt{-\frac{702a^6}{27}}} + \sqrt[3]{-a^3 - \sqrt{-\frac{702a^6}{27}}}$, eſpreſſione immaginaria, quantunque tutte tre le radici ſieno reali, come appunto porta il caſo irriducibile.

190. Nelle equazioni del quarto grado ſi procederà in queſta maniera. Sia l'equazione canonica $x^4 * + pxx + qx - r = 0$, in cui manca il ſecondo termine, e ſe non mancaſſe, da eſſa s'avrebbe a togliere; ſi traſformi queſta in una cubica nella maniera ſpiegata al num. 167. per mezzo delle due formole ſuſſidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, e ſarà la traſformata $y^6 + 2py^4 + ppyy - qq = 0$, e le due ſuſſidiarie, poſti in
$$ + 4ryy$$
luogo di u, e di z i valori ritrovati dal paragone de' termini, ſaranno $xx + yx + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy - \frac{q}{2y} = 0$,

$$xx - yx + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy + \frac{q}{2y} = 0,$$ e perchè ſi ſuppone, che queſta non abbia diviſore alcuno di due dimenſioni, da eſſa ſi tolga il ſecondo termine colla ſoſtituzione $yy = t - \frac{2}{3}p$, ed averemo la nuova equazione

$$\begin{aligned} t^3 - \tfrac{1}{3}ppt &- \frac{2p^3}{27} \\ + 4rt &- \frac{8}{3}pr = 0. \\ &- qq \end{aligned}$$

Si paragoni questa alla prima, o seconda delle quattro canoniche del num. 181., secondo che $4r$ è minore, o maggiore di $\frac{1}{3}pp$, per averne la radice cuba, che per brevità chiamisi h; onde sia $t = h$, e perchè si è fatto $yy = t - \frac{2}{3}p$, sarà $yy = h - \frac{2}{3}p$, e però $y = \sqrt{h - \frac{2}{3}p}$, che si ponga per brevità $= g$. Nelle due formole sussidiarie si ponga g in luogo di y, e gg in luogo di yy, e saranno

$$xx + gx + \frac{gg}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2g} = 0\,,\quad xx - gx + \frac{gg}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2g} = 0,$$

le radici delle quali sono $x = -\frac{g}{2} \pm \sqrt{\frac{q}{2g} - \frac{p}{2} - \frac{gg}{4}}$, della prima, ed $x = \frac{g}{2} \pm \sqrt{-\frac{q}{2g} - \frac{p}{2} - \frac{gg}{4}}$, della seconda; e ponendo il valore di $g = \sqrt{h - \frac{2}{3}p}$, saranno finalmente

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{h - \frac{2}{3}p} \pm \sqrt{\frac{q}{2\sqrt{h - \frac{2}{3}p}} - \frac{1}{3}p - \frac{1}{4}h}\,,$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{h - \frac{2}{3}p} \pm \sqrt{\frac{-q}{2\sqrt{h - \frac{2}{3}p}} - \frac{1}{3}p - \frac{1}{4}h}$$

le quattro radici della proposta equazione

$$x^4 * + pxx + qx - r = 0\,.$$

Sia l'equazione $x^4 * - 86aaxx + 600a^3x - 851a^4 = 0$. Riferita questa all'antecedente canonica, sarà $p = -86aa$, $q =$

$q = 600a^3$, $r = 851a^4$, e però la trasformata cubica sarà $y^6 - 172aay^4 + 10800a^4yy - 3600000a^6 = 0$; ma poichè questa è divisibile per $yy - 100aa$, senza risolverla con le regole delle equazioni cubiche, già se ne â la radice, cioè $yy = 100aa$, ed $y = 10a$. Sostituiti questi valori in luogo di y, e di yy, come pure i valori di p, e di q nelle due sussidiarie, saranno esse $xx + 10ax - 23aa = 0$, $xx - 10ax + 37aa = 0$, e le loro radici $x = -5a \pm \sqrt{48aa}$, $x = 5a \pm \sqrt{-12aa}$, che sono pure le quattro radici della proposta. Si â posto questo esempio per far vedere unicamente l'uso del metodo, mentre la data equazione si può ridurre a due di due dimensioni, colle maniere di sopra a suo luogo spiegate.

191. Nelle sole questioni aritmetiche può avere uso questo metodo di risolvere le equazioni, e non nelle geometriche, poichè avendosi in questo modo il valore dell'incognita espresso da radice cuba, (che si suppone non potersi attualmente cavare, poichè in questo caso l'equazione avrebbe un divisore, e non sarebbe del grado, che mostra) il ritrovare essa radice cuba geometricamente non può farsi altrimenti, che con l'intersecazione delle curve, che è la seconda maniera, e la generale da me di sopra indicata al num. 180.

Consiste questo metodo nell'introdurre una nuova incognita nell'equazione, per indi avere due equazioni,

ciascuna delle quali contenga ambe le incognite, e tutte due assieme le cognite tutte dell'equazione proposta; queste due equazioni sono due luoghi geometrici da costruirsi, le intersezioni de' quali ci determinano i valori geometrici, o sia le radici dell'equazione proposta; e la ragione è chiara, poichè siccome dalla combinazione di due luoghi, o sia di due equazioni indeterminate, ponendo in una di queste in luogo di una delle due incognite il valore dato per l'altra equazione, nasce un'equazione determinata, così la determinata può risolversi in due indeterminate.

Sieno adunque le due equazioni $ax = zz$, $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$; se dalla prima, per esempio, si cavi il valore di x, che è $\frac{zz}{a}$, e si sostituisca nella seconda, nascerà l'equazione determinata del quarto grado $z^4 - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0$. Adunque se preso il luogo alla parabola $ax = zz$, farassi la sostituzione del valore di zz nell'equazione z^4 ec., nascerà il secondo luogo $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$. Per costruire questo secondo luogo, al centro A, coll'asse trasverso $CB = \frac{8a}{5}$, e col parametro $= 8a$ si descrivano (*Fig.* 95.) le due opposte iperbole BN, CP, le quali, prese le assisse z dal punto D lontano dal centro A la quantità $\frac{a}{5}$ verso il vertice C, saranno il luogo dell'equazione $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$.

Per

Per combinare rettamente questo col primo luogo $ax = zz$, è necessario, che l'origine, e l'asse dell'incognita x sia comune ad ambi i luoghi, e però al vertice D, col parametro $= a$, sull'asse DO, parallelo all'asse conjugato delle opposte iperbole, si descriva la parabola della prima equazione $ax = zz$, incontrerà essa le due iperbole nei quattro punti M, N, R, P, dai quali condotte all'asse DO le perpendicolari MI, NO, RV, PS, saranno esse i quattro valori di z, cioè le quattro radici dell'equazione $z^4 * - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0$; positive le due IM, ON, e negative le altre VR, SP; imperciocchè, se la z dell'equazione determinata (vale a dire ciascuna delle radici di essa) deve essere comune ad ambedue i luoghi, non può esserlo, se non ne' punti M, N, R, P, ne' quali si tagliano questi due luoghi; adunque le rette MI, NO, RV, SP, esprimenti le z, sono le quattro radici dell'equazione determinata proposta

$$z^4 * - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0.$$

292. E' manifesto, che quanto più si accostano i punti M, N, tanto minore è la differenza delle ordinate IM, ON per modo, che quando un punto cade nell'altro, (nel qual caso le curve si toccano, e non si tagliano) le due ordinate sono eguali, cioè due eguali radici avrà l'equazione; che se poi si tagliano le curve nel vertice, in cui è nulla l'ordinata, avrà l'equazione una radice eguale al zero; e se finalmente nè si tagliano, nè si toccano

cano in alcun punto le due curve, le radici della proposta equazione sono immaginarie.

193. Nell'introdurre la nuova incognita fa d'uopo però l'avvertire di farlo in modo, che i due luoghi sieno i più semplici relativamente al grado della proposta equazione; cioè a dire, che se l'equazione è del terzo o quarto grado, i due luoghi sieno del secondo, vale a dire sezioni coniche, e sarà opportuno, a parere di alcuni, che uno sia sempre al circolo, come curva più semplice; ma si rifletta, che determinando un luogo al circolo, l'equazione all'altro luogo può riuscire in moltissimi casi assai imbarazzata, e però in tali casi preferirei al circolo quell' altro qualunque luogo, che mi dasse maggiore semplicità. Se l'equazione è del quinto o del sesto, i due luoghi sieno uno del secondo e l'altro del terzo; se è del settimo, o ottavo, siano uno del secondo, ed uno del quarto, o due del terzo, riducendo però prima quelle dell' ottavo al nono, e così di mano in mano proporzionalmente.

Presa adunque l'equazione del quarto grado

$$x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx + a^3f = 0.$$

Si faccia la equazione

I. $xx + bx = ay$, e quadrando sarà $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$, e però $x^4 + 2bx^3 = aayy - bbxx$. Nella proposta si sostituisca questo valore in luogo di $x^4 + 2bx^3$, e nascerà quest' altra equazione

II. $yy - \frac{bbxx}{aa} + \frac{cxx}{a} - dx - af = 0$, e mettendo nel se-

condo

condo termine di queſta, laſciando intatto il terzo, il valore di xx dato dalla prima equazione, cioè $ay - bx$, naſcerà la

III. $yy - \frac{bby}{a} + \frac{b^3 x}{aa} + \frac{cxx}{a} - dx - af = 0$, e ſoſtituendo il valore di xx nel terzo termine della ſteſſa ſeconda equazione, laſciando intatto il ſecondo, naſcerà la

IV. $yy - \frac{bbxx}{aa} + cy - \frac{bcx}{a} - dx - af = 0$, e poſto in queſta il valore di xx, naſcerà la

V. $yy + cy - \frac{bby}{a} - \frac{bcx}{a} + \frac{b^3 x}{aa} - dx - af = 0$, da cui finalmente ſe ſi ſottragga la prima ridotta al zero, cioè $xx + bx - ay = 0$, ed indi ad eſſa ſi aggiunga, naſcerà nel primo caſo la

VI. $yy + cy - \frac{bby}{a} + ay - xx - bx - \frac{bcx}{a} + \frac{b^3 x}{aa} - dx - af = 0$, e nel ſecondo la

VII. $yy + cy - \frac{bby}{a} - ay + xx + bx - \frac{bcx}{a} + \frac{b^3 x}{aa} - dx - af = 0$.

194. Egli è chiaro, che la prima equazione è un luogo alla Parabola apolloniana; per riconoſcere l'altre fa d'uopo ſervirſi delle riduzioni ſpiegate ai numeri 127., e 128. Con le quali troveraſſi, che la ſeconda ſarà luogo alla Parabola quando ſia $ac = bb$; all'Elliſſi quando ſia ac maggiore di bb; ed all'Iperbola finalmente quando ſia ac mi-

minore di bb. Che la terza sarà all'ellissi, che passa ad essere un circolo quando sia $c=a$, e retto l'angolo delle coordinate. Che la quarta sarà all'iperbola, la quale in oltre sarà equilatera, se sia $b=a$. Che la quinta sarà alla parabola. Che la sesta sarà all'iperbola equilatera. Che la settima sarà al circolo, quando sia retto l'angolo delle coordinate.

Quindi si potrà scegliere per la costruzione del problema la combinazione di que' due luoghi, che più ci torneranno a proposito.

195. Se il secondo termine della proposta equazione fosse stato negativo, averebbesi fatto $xx-bx=ay$, e le equazioni nascenti sarebbero le stesse di prima, mutando solo il segno a que' termini, ne' quali la b è di potestà dispari; e se la proposta equazione fosse stata mancante del secondo termine, averebbesi preso $xx=ay$, e però, cancellando i termini dove si trova la b nell'altre equazioni, saranno esse quelle, che a questo caso competono.

196. Essendovi nelle equazioni proposte il secondo termine $\pm 2bx^3$, si prende il luogo alla parabola $xx\pm bx=ay$ piuttosto, che $xx=ay$, perchè così gli altri luoghi, che nascono, non ânno il rettangolo xy, e però sono più facili da costruirsi.

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia l'equazione del terzo grado $x^3 - aax + 2a^3 = 0$. Si moltiplichi per $x = 0$, per ridurla del quarto, onde sia $x^4 - aaxx + 2a^3x = 0$; e debbasi costruire per mezzo d'una parabola, e d'un circolo.

Giacchè manca il secondo termine, si faccia $xx = ay$, luogo alla parabola; adunque sostituendo in luogo di x^4, e di xx i valori $aayy$, ed ay, sarà $yy - ay + 2ax = 0$, a cui aggiunta la prima equazione $xx - ay = 0$, si avrà finalmente l'equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$, luogo al circolo.

Col diametro $BD = \sqrt{2aa}$ si descriva il circolo $ADME$, (*Fig.* 96.) e si faccia $BC = a$, sarà anche l'ordinata $CA = CB = a$. Dal punto A condotta la indefinita AP parallela ad ED, e prese sopra di essa le assisse $AP = y$, e chiamate le ordinate $PM = x$, sarà questo il luogo dell'equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$. Sull'asse AP, in cui si sono prese le y, col vertice A si descriva la parabola appolloniana MAM dell'equazione $xx = ay$, taglierà essa il circolo ne' due punti A, M, dai quali condotte le ordinate, saranno esse le radici reali dell' equazione $x^4 * - aaxx + 2a^3x = 0$, e due immaginarie.

Ma la ordinata nel punto A è nulla, adunque una radice sarà $= 0$, come appunto deve essere, essendo

essa stata introdotta con moltiplicare la equazione proposta per $x = o$, adunque sarà PM la radice reale, e negativa dell'equazione $x^3 - aax + 2a^3 = o$, e le altre due immaginarie. Se avessi moltiplicata la proposta equazione non per $x = o$, ma per x eguale ad una qualunque quantità, in due punti fuori del vertice il circolo taglierebbe la parabola, uno de' quali mi darebbe la radice introdotta, l'altro quella della equazione proposta.

Ora per dimostrare, che PM è una radice dell' equazione $x^4 - aaxx + 2a^3 x = o$, si consideri, che per la natura del circolo è $EO \times OD = \overline{OM}^2$, ma $OM = -x - a$, $EO = y + \sqrt{2aa} - a$, ed $OD = a - y + \sqrt{2aa}$, dunque $xx + 2ax + aa = aa + 2ay - yy$; ma per l'equazione della parabola AM, è $xx = ay$, e però $\frac{x^4}{aa} = yy$, adunque sostituiti i valori di y, e di yy, e ridotta l'equazione al zero, sarà $x^4 - aaxx + 2a^3 x = o$, che è appunto quella del quarto grado, di cui si volevano le radici, il che ec.

197. Se si volesse costruire l'equazione $x^4 - aaxx + 2a^3 x = o$ per mezzo di due parabole, converrebbe servirsi dell'equazione ritrovata di sopra $yy - ay + 2ax = o$, ed il luogo di questa colla parabola dell'equazione $xx = ay$ determinerebbero le radici, che si cercano.

Si descriva adunque (*Fig.* 97.) col parametro $= 2a$ la parabola MCA, in cui fatta $CD = \frac{1}{8}a$, ed abbassata

ta $DA = \frac{1}{2}a$, che incontrerà la parabola nel punto A, e condotta per lo punto A l'indefinita AP parallela all' asse CD, prese le assisse x dal punto A positive verso B, e negative verso P, e le ordinate $PM = y$, sarà essa il luogo dell'equazione $yy - ay + 2ax = 0$, quindi col vertice A, all'asse AQ si descriva l'altra parabola MAS dell'equazione $xx = ay$; taglierà questa la prima nei punti A, ed M, ed abbassata la perpendicolare MP, darà essa la radice AP negativa dell' equazione proposta, e perchè nel punto A la perpendicolare è nulla, è pure nulla l'altra radice, come deve esserlo, essendo stata moltiplicata l'equazione proposta per $x = 0$.

Imperciocchè essendo nella parabola MCA la $CN = -x + \frac{a}{8}$, ed $NM = y - \frac{a}{2}$, sarà per la proprietà di essa parabola, $\frac{aa}{4} - 2ax = yy - ay + \frac{aa}{4}$, e sostituiti i valori di y, e di yy, dati per la prima equazione alla parabola MAS, cioè $xx = ay$, ed ordinata l'equazione, avremo finalmente $x^4 - aaxx + 2a^3x = 0$, che è l'equazione del quarto grado, di cui si volevano le radici.

198. Che se avessi voluto servirmi della parabola, e dell'iperbola equilatera, bastava sottrarre dalla detta equazione $yy - ay + 2ax = 0$ la prima equazione $xx - ay = 0$, e sarebbe nata l'equazione $yy + 2ax - xx = 0$, che è un luogo all'iperbola equilatera, la quale co-

costruita mi avrebbe date, per mezzo della intersecazione colla parabola dell' equazione $xx = ay$, le radici cercate.

199. E se finalmente avessi voluto sciogliere il problema per mezzo del circolo, e dell'iperbola, avrei costruita la terza equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$, luogo al circolo, e la quarta equazione $yy + 2ax - xx = 0$, luogo all'iperbola, come si è veduto; l'intersecazione dei quali luoghi mi avrebbe date le radici cercate.

200. Ma senza moltiplicare per x l'equazione proposta $x^3 - aax + 2a^3 = 0$, si avrebbe potuto costruirla nella seguente maniera, quando però non prema d'introdurre piuttosto un luogo, che un' altro. Si faccia adunque $xx = ay$, ed in luogo di xx si ponga nell'equazione il suo valore ay, nascerà l'equazione $xy - ax + 2aa = 0$, luogo all'iperbola fra gl'asintoti.

Si taglino adunque ad angoli retti le due indefinite SR, QT, (*Fig.* 98.) e sieno esse gli asintoti delle due iperbole MM, mm del rettangolo costante $-2aa$, prendendo le assisse dal punto A lontano dal punto B la quantità a. Al vertice A, all'asse AR, col parametro $= a$ si descriva la parabola della prima equazione $xx = ay$, taglierà essa l'iperbola MM nel punto M; ed abbassata l'ordinata PM, sarà essa la radice reale, e negativa dell' equazione proposta.

In

In fatti, per la proprietà dell' iperbola MM, sarà $BP \times PM = -2aa$, cioè $xy - ax = -2aa$, ma per la proprietà della parabola AM, si â $y = \frac{xx}{a}$, adunque sostituito in vece di y il suo valore, ed ordinata l'equazione, sarà $x^3 - aax + 2a^3 = 0$, che è la proposta, il che ec.

Generalmente tutte le equazioni del terzo grado si possono sempre in questo modo costruire semplicemente, senza ridurle al quarto, con una Parabola, e con una Iperbola fra gl' Asintoti.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione del quarto grado $z^4 - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0$, la quale debbasi costruire per mezzo della parabola, e del circolo. Si prenda l'equazione $ax = zz$, e fattone il quadrato, si sostituisca nell' equazione proposta in luogo di z^4, e di zz il suo valore, e nascerà la seconda equazione $xx - 5ax + 2az + 3aa$, dalla quale sottratta primieramente, ed indi aggiunta la prima equazione $zz - ax = 0$, si avrà nel primo caso la terza equazione $xx - 4ax + 2az + 3aa - zz = 0$, e nel secondo caso la quarta $xx - 6ax + 2az + 3aa + zz = 0$, che è un luogo al circolo, e però di essa mi servo per costruire la proposta equazione del quarto grado.

Si

Si descriva adunque col raggio $=\sqrt{7aa}$ il circolo BMF, e presa dal centro C verso B (*Fig.* 99.) la $CL=3a$, indi dal punto L eretta al diametro la perpendicolare $LA=a$, si tiri dal punto A la retta indefinita AP parallela al diametro BF, saranno le $AP=x$, e le corrispondenti ordinate nel circolo $PM=z$; e però sarà A il vertice, ed AP l'asse della parabola dell'equazione $ax=zz$, onde descritta al vertice A, coll' asse AP, col parametro $=a$ la parabola AM, incontrerà essa il circolo in quattro punti M, dai quali condotte all' asse AP le perpendicolari PM, saranno esse le radici, due positive, e due negative dell' equazione proposta

$$z^4 - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0.$$

Ed in fatti, si prolunghi la PM in D, se fa bisogno, e sarà per la natura del circolo BMF, $BD \times DF = \overline{DM}^2$, ma $DM = z + a$, $BD = x - 3a + \sqrt{7aa}$, e $DF = -x + 3a + \sqrt{7aa}$, adunque $zz + 2az + aa = -xx + 6ax - 2aa$; ma, per la natura della parabola AM, $ax = zz$, ed $xx = \frac{z^4}{aa}$, adunque fatta la sostituzione di questi valori, ed ordinata l'equazione col paragonarla al zero, sarà $z^4 - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0$, che è la proposta; il che ec.

ESEM-

ESEMPIO III.

Sia l'equazione del terzo grado $x^3 - 3aax + 5a^3 = 0$, che si moltiplichi per $x + 2a$, a fine di ridurla del quarto, e sarà $x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^3x + 10a^4 = 0$.

Si prenda l'equazione alla parabola $xx + ax = ay$, e fatto il quadrato, sarà $x^4 + 2ax^3 + aaxx = aayy$, si sostituisca nell'equazione il valore dei due primi termini $x^4 + 2ax^3$, cioè $aayy - aaxx$, e nascerà la
II. $yy - 4xx - ax + 10aa = 0$, ed in questa sostituito in luogo di xx il suo valore $ay - ax$, nascerà la
III. $yy - 4ay + 3ax + 10aa = 0$, da cui sottratta la prima $xx + ax - ay = 0$, ed indi aggiunta, nasceranno le due equazioni, cioè la
IV. $yy - 3ay + 2ax + 10aa - xx = 0$ nel primo caso, e la
V. $yy - 5ay + 4ax + 10aa + xx = 0$ nel secondo caso: prendo il primo, e l'ultimo luogo.

Per costruire l'ultimo, si descriva il circolo OSN (*Fig.* 100.) del raggio $OP = \frac{1}{2}a$, e prodotto in F, onde sia $OF = 2a$, ed eretta dal punto F la perpendicolare $FC = FO = 2a$, si tiri la indefinita CQ parallela ad FP. Presa una qualunque $CQ = y$, saranno le corrispondenti ordinate negative QS, QN le x, ed il circolo il luogo della quinta equazione. Si prenda ora in FC

la $CB = \frac{1}{2}a$, e dal punto B si tiri la perpendicolare $BA = \frac{1}{4}a$, indi al vertice A, col parametro $= a$ si descriva la parabola NAM, che sarà il luogo della prima equazione, prese le assisse y sulla retta CQ. Da' punti O, N, ne' quali la parabola taglia il circolo, alzate le perpendicolari OH, NQ, saranno esse le due radici reali negative dell' equazione del quarto grado $x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^3x + 10a^4 = 0$.

E perchè OH presa negativa è eguale a $2a$, che è la radice introdotta colla moltiplicazione della proposta equazione in $x + 2a$, sarà NQ la radice reale negativa dell' equazione proposta $x^3 - 3aax + 5a^3 = 0$, l'altre due radici immaginarie.

Imperocchè, per la natura del circolo OSL, sarà $OG \times GL = \overline{GN}^2$, ma $OG = y - 2a$, $GL = 3a - y$, e $GN = -2a - x$, dunque fatte le sostituzioni, sarà $xx + 4ax + 10aa + yy - 5ay = 0$; ma per l'equazione alla parabola NAM, $y = \frac{xx + ax}{a}$, ed $yy = \frac{x^4 + 2ax^3 + aaxx}{aa}$, dunque sostituiti nell' equazione al circolo questi valori di y, ed yy, sarà finalmente

$$x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^3x + 10a^4 = 0;$$ il che ec.

ESEM-

ESEMPIO IV.

Sia l'equazione $x^6 - 4aax^4 - 8a^3x^3 + 8a^4xx + 32a^6 = 0$, e perchè è divisibile per $xx - 4ax + 4aa$, ed il quoziente è l'equazione del quarto grado $x^4 + 4ax^3 + 8aaxx + 8a^3x + 8a^4 = 0$, si costruisca questa.

Presa adunque l'equazione $xx + 2ax = ay$, e fatto il quadrato $x^4 + 4ax^3 + 4aaxx = aayy$, si sostituisca nell'equazione in luogo di $x^4 + 4ax^3$ il valore $aayy - 4aaxx$, e viene la

II. $yy + 4xx + 8ax + 8aa = 0$, in questa si ponga il valore di xx, cioè $ay - 2ax$, e viene la

III. $yy + 4ay + 8aa = 0$, da cui sottraggasi la prima, e nasce la

IV. $yy + 5ay + 8aa - xx - 2ax = 0$, ed aggiunta finalmente la prima alla terza, sarà la

V. $yy + 3ay + 8aa + xx + 2ax = 0$.

Il secondo luogo è immaginario; il terzo è equazione determinata, ma le sue radici sono immaginarie; il quinto luogo è pure immaginario; il quarto luogo poi è reale, ed è un' iperbola equilatera.

All'asse $DC = \sqrt{11aa}$ si descrivano col centro A l'iperbole CR, DG; (*Fig.* 101.) si prenda $AB = a$, e si erigga la perpendicolare indefinita BM, in cui si pren-

da $BM = \frac{5a}{2}$, e dal punto M conducasi la MQ parallela all'asse DC; prese dal punto M sopra MQ le x, saranno le corrispondenti QR, o sia MT le y, e la curva il luogo dell' equazione quarta $yy + 5ay + 8aa - xx - 2ax = 0$. Prodotta QM in N, e fatta $MN = a$, e condotta NA al centro dell' iperbola, si prenda $NO = a$, ed al vertice O, col parametro $= a$, all'asse OS si descriva la parabola OM, che passerà per lo punto M, indi prese sulla MT le y, e le corrispondenti ordinate $TL = x$, sarà essa il luogo della prima equazione $xx + 2ax = ay$; ma poichè questi due luoghi non si possono mai incontrare, come è chiaro, saranno immaginarie tutte quattro le radici dell' equazione

$$x^4 + 4ax^3 + 8aaxx + 8a^3x + 8a^4 = 0,$$

quindi la proposta

$$x^6 - 4aax^4 - 8a^3x^3 + 8a^4xx + 32a^6 = 0$$

si trova avere due sole radici reali tra loro eguali, cioè ciascheduna $= 2a$.

201. Ma se in oltre si volessero costruire le equazioni del terzo, e quarto grado per mezzo non solo di luoghi conici, ma di luoghi conici già dati, o simili ai dati, il che può avere uso, quando una delle sezioni coniche sia data nel problema, si potrà farlo nel seguente modo, intendendo però, che le equazioni del

terzo

terzo grado si riducano al quarto, e queste si liberino dal secondo termine, se lo avessero.

Devo però avvertire, che quantunque per lo più sia bene il determinarsi a quel dato luogo conico, che già entra nel problema; tuttavia si deve avere la mira, che l'uso di esso luogo dato non si opponga alla maggiore semplicità della costruzione, nel qual caso, non curato il luogo già dato, tornerà meglio introdurne due nuovi.

Volendosi adunque servire di luoghi dati, o simili a' dati, l'artifizio consiste nell'introdurre nelle equazioni due indeterminate, da fissarsi poi nel fine a misura del bisogno. Sia adunque l'equazione

$$z^4 + abzz - aacz + a^3 d = 0.$$

Si ponga $z = \frac{ax}{f}$, per introdurre la prima indeterminata f; fatte le sostituzionioni, sarà

$$x^4 + \frac{bffxx}{a} - \frac{f^3 cx}{a} + \frac{f^4 d}{a} = 0.$$

Si prenda il primo luogo

I. $xx - fy = 0$, e posti i valori di xx, e di x^4, nascerà il secondo luogo

II. $yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} = 0$, a questo si aggiunga il primo, ed avremo il

III. $xx - fy + yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} = 0$. Per introdurre

 la

la seconda indeterminata g, si moltiplichi il primo luogo per $\frac{g}{a}$, ed avremo $\frac{gxx - gfy}{a} = 0$, che aggiunto al secondo ci dà il

IV. $yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} + \frac{gxx}{a} - \frac{gfy}{a} = 0$, e sottratto ci dà il

V. $yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} + \frac{gfy}{a} - \frac{gxx}{a} = 0$.

Il primo, e secondo luogo sono alla Parabola, il terzo al Circolo, quando le coordinate facciano angolo retto, il quarto all'Ellissi, ed il quinto all'Iperbola.

Debbasi ora, per esempio, costruire l'equazione per mezzo d'un circolo dato, e d'un' iperbola data. Si prenda adunque il terzo, e quinto luogo; e quanto al terzo luogo, col raggio $CG = \frac{f}{2a}\sqrt{cc - 4ad + bb - 2ab + aa}$ si descriva il circolo EMG, (*Fig.* 102.) e presa $CD = \frac{fc}{2a}$, si abbassi dal punto D la perpendicolare $DA = \frac{af - bf}{2a}$, (supposta a maggiore di b, e si alzi dalla parte opposta, quando sia b maggiore di a) indi dal punto A sulla retta AP parallela a DG prese le assisse $AP = x$, saranno le corrispondenti PM le y, ed il circolo EMG il luogo dell'equazione

$$xx - fy + yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} = 0.$$

Rispet-

Rispetto al quinto luogo; per costruirlo, e combinarlo col circolo, prodotta per lo punto A, origine delle x, la retta DA in H in modo, che sia $AH = \frac{gf + bf}{2a}$, e condotte per i punti A, H le parallele AP, HK alla DG; si prenda sulla HK verso il punto L la porzione $HI = \frac{fc}{2g}$, e col centro I, coll' asse trasverso $LK = \frac{f}{ga}\sqrt{aacc + 4aagd - abbg - ag^3 - 2abgg}$ (supposto però $cc + 4gd$ maggiore di $\frac{bbg + g^3 + 2bgg}{a}$) si descriva l'iperbola KM del parametro

$KO = \frac{f}{aa}\sqrt{aacc + 4aagd - abbg - ag^3 - 2abgg}$, in cui essendo $AP = x$, $PM = y$, sarà essa il luogo della quinta equazione. Dai punti M, nei quali essa taglia il circolo, condotte le perpendicolari MP, MP alla AP; saranno le AP, AP le radici dell'equazione

$$x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = 0.$$

E poichè si è fatta $z = \frac{ax}{f}$, data la x, è pure data la z, vale a dire le radici dell'equazione da prima proposta z^4 ec.

Ma se avessi supposto $cc + 4dg$ minore di $\frac{bbg + 2bgg + g^3}{a}$,

il

il luogo della quinta equazione sarebbe l'iperbola MM, (*Fig.* 103.) il di cui semiasse trasverso

$$=\frac{f}{2a}\sqrt{\frac{bbg+2bgg+g^3-acc-4agd}{g}}$$, il semiasse conjugato $IK=\frac{f}{2g}\sqrt{\frac{bbg+2bgg+g^3-acc-4agd}{a}}$, ed il parametro KO dell'asse conjugato

$$=\frac{f}{a}\sqrt{\frac{bbg+2bgg+g^3-acc-4agd}{a}}.$$

Ciò posto, per soddisfare alla prima condizione, che il circolo sia dato; si ponga, che sia il raggio di esso $=r$, adunque dovrà essere

$r=\frac{f}{2a}\sqrt{cc-4ad+bb-2ab+aa}$, dalla quale equazione si cavi il valore della indeterminata assunta

$$f=\frac{2ar}{\sqrt{cc-4ad+bb-2ab+aa}}$$; ed il descritto circolo EGM sarà quello del raggio $=r$.

Per soddisfare alla seconda condizione, che l'iperbola sia data: sia $2t$ il dato asse trasverso, e p il parametro, sarà adunque $2t=\frac{f}{g}\sqrt{cc+4gd-\frac{bbg-g^3-2bgg}{a}}$, e però $f=\frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-\frac{bbg-g^3-2bgg}{a}}}$; ma è pu-

re

re $p = \frac{f}{a} \sqrt{cc + 4dg - \frac{bbg - g^3 - 2bgg}{a}}$, adunque posto in luogo di f il valore ritrovato, sarà $p = \frac{2gt}{a}$, da cui si ricava il valore di $g = \frac{ap}{2t}$, e posto questo in luogo di g nel valore di f, sarà

$$f = \frac{2apt}{\sqrt{4ttcc + 8aptd - 2bbpt - \frac{aap^3}{2t} - 2abpp}};$$

quindi il diametro trasverso, ed il parametro della descritta iperbola (*Fig.* 102.) saranno appunto le date linee $2t$, e p, e ciò riguardo al primo caso.

Rispetto poi al secondo, cioè quando $cc + 4dg$ è minore di $\frac{bbg + g^3 + 2bgg}{a}$, si chiami l'asse conjugato della iperbola data $LK = 2u$, ed il suo parametro $= q$, sarà $2u = \frac{f}{g} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^3}{a} - cc - 4dg}$, e $q = \frac{f}{a} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^3}{a} - cc - 4dg}$; quindi si ritroverà, operando come sopra, $g = \frac{aq}{2u}$,

ed $f = \frac{2aqu}{\sqrt{2bbuq + 2baqq + \frac{aaq^3}{2u} - 4ccuu - 8aduq}}$;

e

e l'iperbola avrà per asse conjugato $LK = 2u$, e per parametro dello stesso asse, $KO = q$. Ed il problema sarà costruito così per mezzo d'un circolo dato, e d'una data iperbola.

Che se non sarà data l'iperbola, ma dovrà essere simile ad una data, vale a dire, che l'asse sia al suo parametro in data ragione, per esempio di m ad n, poichè si è veduto di sopra, che la ragione dell'asse al parametro è quella di a alla g; basterà fare l'analogia $a, g :: m, n$ per indi avere il valore di $g = \frac{an}{m}$.

Usando dello stesso metodo si potrà costruire l'equazione col mezzo di altri dati luoghi, o simili ai dati; come, per esempio, col mezzo del suddetto dato circolo, e di una data ellissi, o simile ad una data, prendendo in vece della quinta, la quarta equazione ec.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $x^4 - ax^3 - aaxx - a^3x - 2a^4 = 0$, e si voglia costruire per mezzo d'una parabola del parametro $= a$, e con una ellissi simile ad una data, il di cui asse trasverso sia al parametro nella data ragione di b a d.

Tolgasi da essa il secondo termine colla sostituzione

di

di $x = z + \frac{a}{4}$, e sarà la trasformata

$$z^4 - \frac{11aazz}{8} - \frac{13a^3z}{8} - \frac{595a^4}{256} = 0.$$

Pongo $z = \frac{ay}{f}$, per introdurre la prima indeterminata f, e sarà $y^4 - \frac{11ffyy}{8} - \frac{13f^3y}{8} - \frac{595f^4}{256} = 0$. Preso per primo il luogo $yy = fq$ alla parabola, e fatta la sostituzione de' valori di y^4, e di yy, avremo il secondo luogo pure alla parabola $qq - \frac{11fq}{8} - \frac{13fy}{8} - \frac{595ff}{256} = 0$; ma poichè la parabola data è del parametro $= a$, potremo servirci del primo luogo prendendo $f = a$, e però sarà esso $yy = aq$, e sostituendo il valore di f nel secondo (giacchè non essendo data la ellissi, la prima indeterminata f riguardo alla medesima è arbitraria), sarà esso $qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa}{256} = 0$.

Si moltiplichi ora il primo luogo per $\frac{g}{a}$ a fine d'introdurre la seconda indeterminata g, e sarà $\frac{gyy - agq}{a} = 0$, il quale aggiunto al secondo darà il terzo luogo $qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa}{256} + \frac{gyy - agq}{a} = 0$, all'ellissi.

Per costruire questo terzo luogo, s'avrebbe a descrivere

vere l'ellissi MSQ (*Fig.* 104.) coll'asse trasverso $SQ = 2\sqrt{\frac{716aag + 176agg + 64g^3 + 169a^3}{256g}}$, e col parametro $= \frac{2a}{g}\sqrt{\frac{716aag + 176agg + 64g^3 + 169a^3}{256g}}$; ma poichè in essa la ragione dell'asse al parametro è quella di g ad a, e deve essere, per la condizione data, quella di b a d, sarà $g = \frac{ab}{d}$; e però sostituito in luogo di g il suo valore, si descriverà l'ellissi MSQ coll' asse trasverso $= \frac{1}{8d}\sqrt{\frac{716aabdd + 176aabbd + 64aab^3 + 169aad^3}{b}}$, e col parametro $= \frac{1}{8b}\sqrt{\frac{716aabdd + 176aabbd + 64aab^3 + 169aad^3}{b}}$.

Ora dal centro C presa $CA = \frac{11ad + 8ab}{16d}$, ed abbassata dal punto A la perpendicolare $AB = \frac{13d}{16b}$, se dal punto B si tirerà la BR parallela all' asse SQ, presa una qualunque $BR = q$, sarà $RM = y$, e l'ellissi il luogo della terza equazione

$$qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa}{256} + \frac{gyy - agq}{a} = 0.$$

Al vertice B, asse BR, col parametro $= a$ si descriva la parabola MBM dell'equazione $yy = aq$, taglierà essa l'ellissi ne' due punti M, M; dai quali condotte

le

le perpendicolari RM, RM alla retta BR, saranno esse le due radici reali della proposta equazione.

Imperciocchè, per la proprietà dell' ellissi, sarà $SP \times PQ$ a $\overline{PM}^2$, come l'asse trasverso al parametro, ma $CP = q - \frac{11ad - 8ab}{16d}$, e però

$SP = \frac{1}{16d}\sqrt{\frac{716aabdd + 176aadbb + 64aab^3 + 169aad^3}{b}} + q - \frac{11ad - 8ab}{16d}$, e

$PQ = \frac{1}{16d}\sqrt{\frac{716aabdd + 176aadbb + 64aab^3 + 169aad^3}{b}} - q + \frac{11ad + 8ab}{16d}$, ed inoltre $PM = y - \frac{13ad}{16b}$, adunque avremo

l'analogia $\frac{716aabdd + 176aabbd + 64aab^3 + 169aad^3}{256bdd} - qq + \frac{11adq + 8abq}{8d} - \frac{121aadd - 176aabd - 64aabb}{256dd}, yy - \frac{13ady}{8b} + \frac{169aadd}{256bb} :: \frac{1}{d}, \frac{1}{b} :: b, d$; e però l'equazione

$\frac{595aabdd}{256bd} - dqq + \frac{11adq + 8abq}{8} = byy - \frac{13ady}{8}$, ma per l'equazione alla parabola, è $yy = aq$; sostituiti adunque in luogo di q, e di qq i loro valori $\frac{yy}{a}$, $\frac{y^4}{aa}$, ed ordinata l'equazione, e dividendo per d, e moltiplicando i termini per aa, sarà $y^4 - \frac{11aayy}{8} - \frac{13a^3y}{8} - \frac{595a^4}{256} = 0$.

Ma per la sostituzione fatta di $z = \frac{ay}{f}$ abbiamo $z = y$ (essendo $f = a$), dunque sarà $z^4 - \frac{11aazz}{8} - \frac{13a^3z}{8} - \frac{595a^4}{256} = 0$, che è l'equazione ridotta, alle radici della quale aggiunto $\frac{a}{4}$, saranno esse le radici della proposta

$$x^4 - ax^3 - aaxx - a^3x - 2a^4 = 0,$$ il che ec.

Era superfluo il fare tutta questa fatica sopra un' esempio, che di natura sua è piano, e non solido, essendo la proposta equazione divisibile per $x + a$, e per $x - 2a$; ma servirà per fare vedere l'uso del metodo.

202. Le equazioni del quinto, e sesto grado si costruiranno per mezzo di due luoghi, cioè uno del terzo grado, e l'altro conico.

ESEMPIO VI.

Sia l'equazione $x^5 + aax^3 - a^5 = 0$. Prendo la parabola apolloniana $xx = ay$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo $xyy + axy - a^3 = 0$. Nulla fin'ora si è parlato della costruzione de' luoghi superiori alle sezioni coniche, essendomi riserbata a trattarne nel seguente Capo, perchè così necessariamente esigge l'ordine; per ora

ora adunque si suppongano, e però descritta la curva de' tre rami *MCH*, *FE*, *PNO* (*Fig.* 105.) dell' equazione $xyy + xxy - a^3 = 0$, in cui le *AB* sono le x, e le *BC* le y; al vertice *A*, asse *AL*, parametro $= a$ si descriva la parabola apolloniana *RAC*, incontrerà essa il ramo *MCH* nel punto *C*, e però abbassata la perpendicolare *CB*, sarà $AB = x$ la radice positiva, e reale dell'equazione proposta, e l'altre quattro immaginarie. Volendosi costruire la medesima equazione per mezzo d'un'iperbola fra gl'asintoti, e parimenti per un luogo del terzo grado, si faccia $xy = aa$, sostituendo sarà $x^3 + aax - ayy = 0$.

All'asse *AB*, con le assisse $AB = x$, e le ordinate $BC = y$ (*Fig.* 106.) si descriva la curva *CAN*, che è il luogo dell'equazione $x^3 + aax - ayy = 0$, e fra gl' asintoti *AB*, *AG* si descriva l'iperbola *MCH* dell'equazione $xy = aa$, prese le x sul medesimo asse *AB*; taglierà essa la prima curva nel punto *C*, da cui abbassata la perpendicolare *CB*, sarà $AB = x$ la radice dell' equazione proposta, il che ec.

Moltiplico ora la medesima equazione per $x = 0$, a fine di ridurla del sesto grado, ed ô $x^6 + aax^4 - a^5 x = 0$. Prendo il medesimo luogo alla parabola $xx = ay$, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $y^3 + ayy - aax = 0$, che è la curva *NBAM* (*Fig.* 107.), prese le assisse $AP = y$, e le $PM = x$.

Col

Col vertice A, all' asse AP, col parametro $=a$ descritta la parabola apolloniana AM dell' equazione $xx=ay$, taglierà essa la detta curva nel vertice A, il quale ci dà una radice $x=0$, che è appunto la introdotta nell'equazione, la taglierà in oltre nel punto M, ed abbassata la perpendicolare MP, sarà essa l'altra radice dell'equazione x^6 ec.

Volendosi servire della parabola prima cubica $x^3=aay$, si faccia la sostituzione nell' equazione $x^6+aax^4-a^5x=0$, e nasce il secondo luogo $yy+xy-ax=0$ all'iperbola apolloniana.

Sulla indefinita AP (*Fig.* 108.) si descriva il triangolo ACP rettangolo in C, (supposto, che l'angolo delle coordinate dell' equazione $yy+xy-ax=0$ si voglia retto) e sia AC, $CP::2, 1$; al centro A, col semidiametro trasverso $AF=a\sqrt{5}$, col parametro $=\frac{2a}{\sqrt{5}}$ si descriva l'iperbola apolloniana FM, la quale, condotta dal punto F l'indefinita FQ parallela ad AC, e presa una qualunque $FQ=x$, e QM parallela a CP eguale ad y, sarà il luogo dell'equazione $yy+xy-ax=0$. All'asse FL parallelo a PC si descriva la parabola cubica NFM dell'equazione $x^3=aay$; taglierà essa l'iperbola nel vertice F, che ci dà la radice $x=0$, e nel punto M, dal quale abbassata la perpendicolare MQ sopra FQ, determinerà essa l'altra radice FQ dell'equazione $x^6+aax^4-a^5x=0$.

Se

Se la noſtra equazione aveſſe avuto il ſecondo termine, volendoſi ſervire della parabola cubica ci ſarebbe nato un ſecondo luogo del terzo grado, quindi o s'avrebbe dovuto fare ſparire eſſo ſecondo termine, o ſervirſi d'altro luogo.

ESEMPIO VII.

Sia l'equazione del ſeſto grado $x^6 + ax^5 + a^5x - a^6 = 0$. Prendo il luogo alla parabola apolloniana $xx = ay$. Fatte le ſoſtituzioni, ſarà il ſecondo luogo $y^3 + xyy + aax - a^3 = 0$, che è la curva CBM (*Fig.* 109.), preſe le aſſiſſe $AP = y$, e le ordinate $PM = x$.

Al vertice A, col parametro $= a$, all'aſſe AP ſi deſcriva la parabola MAM dell'equazione $xx = ay$, taglierà eſſa la detta curva ne' due punti M, M, dai quali condotte all'aſſe le perpendicolari MP, MP, ſaranno eſſe le due radici, una poſitiva, e l'altra negativa dell'equazione propoſta $x^6 + ax^5 + a^5x - a^6 = 0$, e le altre quattro immaginarie.

203. Le equazioni del ſettimo grado ſi coſtruiranno per mezzo di due luoghi del terzo, o pure con uno del ſecondo, ed uno del quarto, ma poichè moltiplicandole per l'incognita ſi riducono all'ottavo, e quelle dell'ottavo ſimilmente ſi coſtruiſcono con un

luogo

luogo del secondo, e l'altro del quarto, mi accontenterò di dare un'esempio di quelle dell'ottavo.

ESEMPIO VIII.

Sia l'equazione dell'ottavo grado $x^8 + ax^7 + a^3x^5 - a^8 = 0$. Presa l'equazione alla parabola apolloniana $xx = ay$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo $y^4 + xy^3 + axyy - a^4 = 0$, che è la curva $GBFCMN$, (*Fig.* 110.) prese le assisse $AP = y$, e le ordinate $PM = x$.

Al vertice A, parametro $= a$, asse AP si descriva la parabola apolloniana MAN dell'equazione $xx = ay$, incontrerà essa la detta curva ne' punti M, N dai quali condotte le perpendicolari MP, NQ all'asse, saranno esse le due radici reali, l'una positiva, e l'altra negativa della proposta equazione, e le altre sei immaginarie.

204. Quì si deve avvertire, che le equazioni del nono grado, siccome quelle dell'ottavo ridotte al nono, col moltiplicarle per l'incognita, si potranno sempre costruire per mezzo di due luoghi del terzo grado, facendo però sparire il secondo termine, quando lo avessero.

Così generalmente le equazioni del decimo grado si potranno costruire per mezzo di un luogo del terzo, e di uno del quarto, e similmente quelle dell'undecimo,

mo, e duodecimo, avvertendo però di ridurre quelle dell' undecimo al duodecimo col moltiplicarle per l'incognita, e di fare svanire dalle equazioni del duodecimo grado il secondo termine, quando lo abbiano; e proporzionalmente s'intenda delle equazioni di grado superiore.

205. Un' altra maniera di costruire le equazioni di qualunque grado può essere per mezzo d'un luogo dello stesso grado dell'equazione proposta, e d'una linea retta nel seguente modo.

Sia l'equazione del quinto grado

$$x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3cx - a^4f = 0.$$

Trasportato dall'altra parte l'ultimo termine a^4f, e posto uno dei divisori lineari dell' ultimo termine, per esempio, $f = z$, dividasi l'equazione per a^4, onde avremo $z = \frac{x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3cx}{a^4}$.

Sull'indefinita BQ, dal punto fisso B prendendo le x, (*Fig.* 111.) si descriva la curva $BMDRNLFC$ di quest'ultima equazione $z = \frac{x^5}{a^4}$ ec., saranno le ordinate PM, SR ec. eguali a z, e però condotta dal punto B la retta $BA = f$, parallela alle ordinate PM, SR, e per lo punto A la indefinita KC d'ambe le parti, e parallela a BQ; dai punti, nei quali essa taglia la curva, abbassate le perpendicolari MP, RS, CQ, determine-

 ranno

ranno esse le assisse BP, BS, BQ, che sono le radici dell' equazione proposta; intendendo le positive da B verso Q, e le negative dalla parte opposta.

Se la retta AC toccherà la curva in un punto, la corrispondente assissa x esprimerà due radici eguali; e se in nessun punto la incontrerà, saranno tutte le radici immaginarie.

Se l' ultimo termine avesse avuto il segno positivo, s'avrebbe fatto $z = -f$, e però s'avrebbe presa $BA = -f$, cioè al disotto del punto B nel senso dei negativi.

206. Può servire questa maniera per verificare le costruzioni, che si fanno con la combinazione di due curve, confrontando il numero delle radici reali, immaginarie, positive, e negative ritrovate con quelle, e con questa.

PROBLEMA I.

207. *Ritrovare tra due date quantità, quante medie geometricamente proporzionali si vogliano.*

Sieno le date quantità a, b. Chiamo x la prima delle medie proporzionali, e formo la progressione geometrica a, x, $\frac{xx}{a}$, $\frac{x^3}{aa}$, $\frac{x^4}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^4}$ ec.

Si

Se si vogliano due medie proporzionali, il quarto termine della progressione dovrà essere b, e però avremo l'equazione $x^3 = aab$: per costruirla colla parabola, e col circolo, la riduco al quarto grado moltiplicandola per $x = 0$, ed è $x^4 - aabx = 0$; preso il luogo alla parabola $xx = ay$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo $yy - bx = 0$, pure alla parabola, da cui sottraendo il primo, nasce il terzo $yy - bx - xx + ay = 0$, all'iperbola, ed aggiunto il primo al secondo, sarà finalmente $yy - bx + xx - ay = 0$, luogo al circolo, supposto retto l'angolo delle coordinate.

Col raggio $CG = \frac{\sqrt{aa + bb}}{2}$ si descriva il circolo OMA (*Fig.* 112.), e presa $CB = \frac{1}{2}a$, si abbassi la perpendicolare $BA = \frac{1}{2}b$, la quale incontrerà il circolo nel punto A, da cui condotta la AQ parallela al diametro OG, e presa una qualunque porzione $AQ = y$, sarà $QM = x$, ed il circolo il luogo dell'equazione $yy - bx + xx - ay = 0$. Al vertice A, asse AQ, parametro $= a$ si descriva la parabola $xx = ay$, incontrerà essa il circolo nel punto M, da cui abbassata la perpendicolare MQ, sarà essa la radice dell'equazione proposta; giacchè il vertice della parabola, essendo nella periferìa del circolo, mi darà l'altra radice $x = 0$ da me introdotta; le altre due sono immaginarie.

Presa la prima, e la seconda equazione si costruirà

rà il problema per mezzo di due parabole apolloniane; presa la prima, e la terza, si costruirà il problema per mezzo della parabola, e dell' iperbola riferita ai diametri.

208. Senza moltiplicare l'equazione $x^3 - aab = o$ per $x = o$, si poteva costruire con la parabola, e l'iperbola fra gl'asintoti, poichè preso il luogo $xx = ay$, e fatta la sostituzione, nasce $xy = ab$.

Fra gl'asintoti NN, QQ (*Fig.* 113.) si descriva l'iperbola MM del rettangolo costante ab, e sieno AP le y, PM le x; all'asse AP, col vertice A, parametro $= a$ si descriva la parabola AM, dal punto M, in cui taglia l'iperbola, abbassata l'ordinata MP, sarà essa la radice dell' equazione proposta.

Ritrovata la prima delle due medie proporzionali, si â anche la seconda eguale alla assissa $AP = y = \frac{xx}{a}$.

209. Per ritrovare tre medie proporzionali il problema è piano, perchè ritrovata geometricamente quella di mezzo, che sia per esempio m, la media fra a, ed m sarà la prima delle tre, e la media fra m, e b sarà la terza.

210. Debbansi ritrovare quattro medie proporzionali, adunque dovrà essere b il sesto termine della progressione, e però si avrà l'equazione $x^5 = a^4 b$.

Pren-

Prendo il luogo alla parabola apolloniana $xx=ay$, e fatta la ſoſtituzione, naſce il ſecondo $xyy-aab=0$, che è l'Iperboloide del terzo grado. E però fra gl'aſintoti QQ, RR deſcrivaſi l'iperboloide MN, mn dell'equazione $xyy=aab$, (*Fig.* 114.) preſe le aſſiſſe $AP=y$, e le $PM=x$. Ora deſcritta al diametro AQ, vertice A la parabola dell'equazione $xx=ay$, e dal punto M, in cui incontra l'iperboloide, abbaſſata l'ordinata MP, ſarà eſſa la radice dell'equazione $x^5-a^4b=0$, e la prima delle medie proporzionali, che ſi cercano, per mezzo della quale ſi trovano le altre.

211. Anche per mezzo dell'iperbola apolloniana fra gl'aſintoti, e della ſeconda parabola cubica ſi può coſtruire il problema.

Si faccia adunque $aa=xy$, luogo all'iperbola ſuddetta, e ſoſtituito in luogo di a^4 il valore $xxyy$, naſce il luogo $x^3=byy$, ſeconda parabola cubica.

All'aſſe AQ (*Fig.* 115.) ſi deſcriva la ſeconda parabola cubica RAN, in cui le AQ ſono le x, e le QN le y; e fra gl'aſintoti ST, MQ deſcritta l'iperbola NN, ed abbaſſata dal punto N, in cui incontra la parabola, la ordinata NQ; ſarà AQ la radice dell'equazione propoſta, cioè la prima delle quattro medie proporzionali.

212. Per ritrovare cinque medie proporzionali il pro-

problema non è se non cubico, imperciocchè ritrovata quella di mezzo geometricamente, che sia per esempio *m*, per avere le due medie fra *a*, ed *m* il problema è cubico, come si è veduto.

Per poca attenzione, che si usi, è facile a vedere, che il problema di ritrovare sei medie proporzionali si costruirà, o con un luogo del secondo, ed uno del quarto grado, o con due del terzo; ma per averne sette, ritrovata quella di mezzo, il problema si riduce a cercarne tre, e così discorrendo si vada di numero maggiore.

PROBLEMA II.

213. *Date le due corde* BA, DC *del circolo* ABCD, (Fig. 116.) *che partono dall' estremità del diametro* BD, *e data la terza corda* AC, *si dimanda il diametro* BD *del circolo*.

Si conduca la corda BC, e si chiami $AB = a$, $AC = b$, $DC = c$, il diametro $BD = x$, e si abbassi la perpendicolare BM sulla corda AC. Poichè l'angolo BCD nel semicircolo è retto, sarà $BC = \sqrt{xx - cc}$, e perchè gli angoli BAC, BDC insistono al medesimo arco BC, e di più gl'angoli M, e BCD sono retti, saranno simili i due triangoli BCD, BAM, quindi

di sarà $AM = \frac{ac}{x}$; ma per la decimaterza del secondo d'Euclide, è $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2CAM$, adunque sarà l'equazione $xx - cc = aa + bb - \frac{2abc}{x}$, cioè

$$x^3 - ccx - aax - bbx + 2abc = 0.$$

La moltiplico per x, a fine di ridurla del quarto grado, e così costruirla per mezzo della parabola, e del circolo; ed è $x^4 - ccxx - aaxx - bbxx + 2abcx = 0$.

Preso adunque il luogo alla parabola, che abbia per parametro la minore delle tre corde, che sia per esempio c, cioè presa $xx = cy$, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $yy - \frac{ccy - aay - bby}{c} + \frac{2abx}{c} = 0$, che è pure alla parabola, a cui aggiunta la prima equazione $xx - cy = 0$, avremo finalmente il luogo al circolo, prese le coordinate in angolo retto,

$$yy - \frac{2ccy - aay - bby}{c} + \frac{2abx}{c} + xx = 0.$$

Al raggio $AC = \frac{\sqrt{aabb + ccmm}}{c}$ (facendo per brevità $m = \frac{2cc + aa + bb}{2c}$) si descriva il circolo $AMBP$, e presa (*Fig.* 117.) $CD = m$, si erigga dal punto D la perpendicolare $DE = \frac{ab}{c}$, che terminerà nella perife-

rìa

rìa del circolo nel punto E, e condotta la EQ indefinita parallela al diametro AB, presa sopra di essa una qualunque $EL = y$, sarà l'ordinata corrispondente $LM = x$, ed il circolo il luogo dell'equazione. Al vertice E, asse EQ, parametro $= c$ si descriva la parabola dell'equazione $xx = cy$; taglierà essa il circolo col vertice nel punto E, che mi dà la radice $x = o$ da me introdotta. Lo taglierà in oltre ne' tre punti M, N, P; da' quali abbassate alla retta EQ le perpendicolari ML, NR, PQ, saranno esse le tre radici dell'equazione $x^3 - ccx - aax - bbx + 2abx = o$, due positive, ed una negativa. La prima positiva ML non serve per questo problema; imperciocchè, supposta $y = c$, sarà nella parabola $x = c$, e nel circolo

$$x = -\frac{ab}{c} + \sqrt{\frac{aabb}{cc} + bb + aa + cc}$$, ma questo valore di x relativamente al circolo è maggiore di c, se le due corde a, b non sono eguali tra loro, ed è eguale alla c, se le due corde a, b sono eguali, quindi il punto nella parabola, che corrisponde all'assissa $= c$, o cade in M, o cade dentro del circolo; adunque ML, o è minore di c, o al più ad essa eguale, e però necessariamente minore di ciascuna delle corde a, b, ed in consegnenza non potrà essere diametro del circolo.

La seconda radice positiva RN ci somministra il

ri-

ricercato diametro; la negativa QP ci forniſce il diametro per un'altro caſo, cioè quando le due corde, che terminano al diametro, ſieno condotte dalla medeſima parte, come nella *Fig.* 118. Imperciocchè, fatte le ſteſſe coſe di ſopra, ſi conduca in oltre la corda AD; eſſendo retto l'angolo DAB, ſaranno i due DAC, MAB eguali ad un retto, ma ſono pure eguali ad un retto i due MAB, MBA, adunque $MBA = DAC = CBD$, perchè inſiſtente ſul medeſimo arco DC; quindi ſimili i due triangoli CBD, MBA, e però $MA = \frac{ac}{x}$, ma per la duodecima del ſecondo d'Euclide $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2 + 2CAM$; adunque ſarà l'equazione $xx - cc = bb + aa + \frac{2abc}{x}$, cioè $x^3 - ccx - bbx - aax - 2abc = 0$, la di cui coſtruzione è la ſteſſa dell'antecedente, a riſerva, che per eſſere ora negativo l'ultimo termine, ſi dovrà condurre DE (*Fig.* 117.) in ſenſo negativo, per lo che l'aſſe della parabola ſarà al di ſotto del diametro del circolo, e le due radici poſitive nel primo caſo ſono negative in queſto, e la negativa diviene poſitiva.

E perchè manca nell'una, e nell'altra equazione il ſecondo termine, ne viene, che le due radici poſitive nel primo caſo ſono eguali alla negativa, e la poſitiva nel ſecondo è eguale alle due negative, onde

si scopre, che la prima delle tre radici, la quale non dà soluzione alcuna del problema, ad esso però in certo modo appartiene in quanto, che è la differenza de' due diametri.

PROBLEMA III.

214. *Dato il rettangolo* ACDB, *ritrovare nel lato prodotto* AC (Fig. 119.) *il punto* E *tale, che condotta dall' angolo* B *la retta* BE, *sia l' intercetta* EF *eguale ad una data retta linea* c.

Quando in luogo del rettangolo $ABDC$, sia dato un quadrato, il problema è piano, ed è stato sciolto nel Capo IV. num. 176., ma supposto $ABDC$ rettangolo, muta natura, ed è solido. Chiamata pertanto $AB = a$, $BD = b$, $DF = x$, e ripetuto lo stesso discorso del citato luogo, si â l'equazione del quarto grado

$$\begin{matrix} x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2abbx + aabb \\ + bbxx \\ - ccxx \end{matrix} = 0.$$

Per costruirla con un'iperbola fra gl'asintoti, e con il circolo, pongo $ab = zx$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo al circolo

$$\begin{matrix} xx - 2ax + aa - 2bz + zz \\ + bb \\ - cc \end{matrix} = 0.$$

Fra

Fra gl'aſintoti BA, BD ſi deſcriva l'iperbola OM dell'equazione $zx = ab$, che paſſerà per lo punto C; preſa una qualunque aſſiſſa BP, BN ec. $= z$, ſarà l'ordinata PO, NM ec. $= x$. Al centro C, col raggio eguale alla data retta c ſi deſcriva il circolo OMV, che ſarà il luogo dell'equazione

$$\begin{aligned} xx - 2ax + aa - 2bz + zz & \\ + bb & \quad = 0. \\ - cc & \end{aligned}$$

Da' punti O, M, nei quali queſto taglia l'iperbola, abbaſſate le perpendicolari OP, MN, eſſe ſaranno le due radici poſitive dell'equazione; la minore ſervirà per il problema nel caſo propoſto dell'angolo BAC, la maggiore per l'angolo ACf. E ſe la data retta c è tale, che il circolo non arrivi a tagliare la oppoſta iperbola mo, l'altre due radici ſono immaginarie; che ſe la taglia, ſaranno negative reali, e ſerviranno per l'angolo ACD.

PROBLEMA IV.

215. *Dividere in tre parti eguali un dato angolo FCB, (Fig. 120.) o ſia arco FAB.*

Siano H, I i punti, che ſi cercano, della diviſione, adunque dovranno eſſere eguali le corde FH, HI, IB, ed eſſendo dato l'arco FAB, ſarà data la

corda FB, che si chiami $=2f$, e condotto il raggio $CA=r$ perpendicolare ad FB, che la taglierà per metà in D, taglierà pure per metà anco la corda HI, e sarà nota CD, che pongo $=a$; condotto il raggio CK perpendicolare a CA, e dal punto H abbassata la HL normale a CK, si chiami $CL=y$, sarà, per la proprietà del circolo, $HL=\sqrt{rr-yy}$, e condotto il raggio CH, per la similitudine dei triangoli HLC, CDE, avremo $DE=\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}$. Ma poichè l'angolo FHC deve essere eguale all'angolo CHI, per la condizione del problema, e $CHI=CED$, per le parallele FB, HI, e $CED=FEH$, dunque $FHC=FEH$, e però $FE=FH$, ma $FH=HI=2y$, dunque $FE=2y$, e tutta la FD sarà $=2y+\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}$, ma $FD=f$; dunque $2y+\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}=f$, e togliendo l'asimmetrìa, sarà

$y^4-fy^3+\frac{ffyy+aayy}{4}-rryy+frry-\frac{ffrr}{4}=0$, cioè (essendo $rr=ff+aa$) $y^4-fy^3-\frac{3rryy}{4}+frry-\frac{ffrr}{4}=0$,

equazione del quarto grado, la quale colle maniere già spiegate si potrà costruire, servendosi di que' luoghi conici, che più piaceranno. Ma quest' equazione è divisibile per $y-f$, ed il quoziente è l'equazione $y^3-\frac{3rry}{4}+\frac{frr}{4}=0$, che voglio costruire colla parabola,

e l'iperbola fra gl'asintoti; faccio adunque $yy = rz$, sarà, fatta la sostituzione, $zy - \frac{3ry}{4} + \frac{fr}{4} = 0$, equazione all' iperbola.

Sia (*Fig.* 121.) $AR = \frac{1}{2}r$, ed $AB = \frac{1}{2}f$; prodotte indefinitamente dall'una, e dall'altra parte le AR, AB, fra esse come asintoti si descriva l'iperbola $TP\,tp$, che passerà per lo punto O; indi presa la $RC = \frac{1}{4}r$, e dal punto C condotta la CI indefinita, e parallela ad AL, se si prenda una qualunque $CI = y$, sarà $IP = z$, e l'iperbola il luogo dell'equazione $zy - \frac{3ry}{4} + \frac{fr}{4} = 0$. Al vertice C, diametro CM, parametro $= r$ si descriva la parabola NCH, taglierà questa l'iperbola nei tre punti T, P, N, dai quali condotte le TS, PQ, NM parallele ad AL, saranno esse le tre radici dell'equazione.

E' chiaro, che la parabola taglia l'iperbola TP nei punti T, P, poichè essendo $CR = \frac{r}{4}$, posto questo valore in luogo di z nell'equazione alla parabola $yy = rz$, ci dà $y = \frac{1}{2}r$, ma $\frac{1}{2}r$ è sempre maggiore di $\frac{1}{2}f$, adunque l'ordinata nella parabola corrispondente al punto R sarà maggiore di RO, e però la parabola passerà al di dentro dell'iperbola.

Ma giacchè è dato il circolo nel problema, torne-

rà

rà molto meglio il servirsi di questo per la costruzione, coll'introdurlo prima di giungere all'equazione finale, e ciò col porre la linea *HL* (*Fig.* 120.), cioè $\sqrt{rr - yy} = z$; sarà adunque $DE = \frac{ay}{z}$, e $DF = 2y + \frac{ay}{z}$, e però l'equazione $2y + \frac{ay}{z} = f$, cioè $2yz + ay = fz$, luogo all' iperbola fra gl'asintoti.

Divisa per metà la *DF* in *P*, (*Fig.* 122.) per lo punto *P*, si conduca la indefinita *PN* parallela ad *AC*, e presa $QO = \frac{1}{2}a$, per lo punto *O* si conduca $V\Delta$ indefinita, e parallela a *KC*. Fra gl'asintoti *PN*, $V\Delta$ si descriva l'iperbola del rettangolo $\frac{af}{4}$, la quale passerà per lo punto *C*, e prese le *y* sulla linea *CQ* positive verso il punto *K*, le corrispondenti ordinate saranno *z*, e l'iperbola il luogo dell'equazione $2zy + ay - fz = 0$.

Taglierà questa il circolo ne' quattro punti *H*, *R*, *M*, *S*, dai quali condotte perpendicolari ad *AC* le *HX*, *RG*, *MY*, *ST*, saranno esse le radici dell'equazione, tre positive *HX*, *RG*, *MY*, ed una negativa *ST*.

E' chiaro, che la radice *HX*, o sia *CL* serve per la divisione del dato arco *FAB*; siccome la radice *YM* serve per la divisione del residuo *FMB* a tutto il circolo, imperciocchè se mi fossi proposta di dividere l'arco *FMB*, avrei avuta la medesima equazione, o sia il medesimo luogo.

La

La radice RG a nulla ferve, ma si avverta però, che ella è $=f$, cioè quella, per cui è divisibile l'equazione, che risulta dai due luoghi $rr-yy=zz$, $2zy+ay-fz=0$, cioè l'equazione solida ritrovata di sopra y^4-fy^3 ec.

E per dimostrarlo, presa $O\omega=\frac{1}{2}a=OQ$, sarà l'ordinata corrispondente del circolo $GR=f$, ma $\omega G=PD=\frac{1}{2}f$, dunque $\omega R=\frac{1}{2}f$; ma il rettangolo costante dell'iperbola è $\frac{af}{4}$, dunque l'iperbola taglierà il circolo nel punto R, e però la radice RG corrispondente a questo punto è $=f$.

L'altra radice TS serve per la divisione in tre parti eguali di tutto il circolo, il che si può in questo modo dimostrare.

Poichè $FD=RG$, saranno eguali gl'archi FK, KR, e però prodotta la RG in Z, sarà l'arco $FAB=RMZ$, sarà adunque FR, o sia BZ metà della differenza dei due archi FAB, FMB; ma se si scioglierà il problema relativamente all'arco BZ, si troverà la stessa iperbola HCS, e sarà ZS un terzo dell'arco BZ, cioè un terzo della metà della differenza degl'archi FAB, FMB, e però BS un terzo della detta differenza; ma HB è due terzi di FAB, e però un terzo della somma dei due archi FAB, RMZ, dunque la somma di HB, e

BS,

BS, cioè l'arco HS sarà la terza parte di tutto il circolo, il che ec.

216. Questo Problema è stato sciolto in un' altra maniera al num. 110., e si è veduto, che nel caso, che il dato angolo sia retto il Problema è piano. Negl' altri due casi dell'angolo ottuso, ed acuto sono giunta alle due equazioni cubiche $2bx^3 - 3aaxx + a^4 = 0$, $2bx^3 + 3aaxx - a^4 = 0$.

Ma se si rifletta, che presa nella prima equazione, che serve per l'angolo ottuso, la x negativa, si muta essa nella seconda, che serve per l'angolo acuto, basterà costruire l'equazione del primo caso, poichè la radice negativa di questo darà la soluzione per l'altro.

Moltiplico adunque la prima equazione per $x = 0$, a fine di ridurla del quarto grado, e la divido per $2b$, sarà essa pertanto $x^4 - \frac{3aax^3}{2b} + \frac{a^4x}{2b} = 0$.

Prendo l'equazione alla parabola $xx - \frac{3aax}{4b} = ay$, e fattone il quadrato, sarà $x^4 - \frac{3aax^3}{2b} + \frac{9a^4xx}{16bb} = aayy$, onde sostituito in luogo dei primi due termini $x^4 - \frac{3aax^3}{2b}$ il loro valore, sarà $yy - \frac{9aaxx}{16bb} + \frac{aax}{2b} = 0$.

Sostituisco in luogo di xx il suo valore $ay + \frac{3aax}{4b}$,

ed

ed ô l'equazione $yy - \frac{9a^3y}{16bb} - \frac{27a^4x}{64b^3} + \frac{aax}{2b} = 0$, a cui aggiunta la prima $xx - \frac{3aax}{4b} - ay = 0$, sarà finalmente $yy - \frac{9a^3y}{16bb} - \frac{27a^4x}{64b^3} + \frac{aax}{2b} + xx - \frac{3aax}{4b} - ay = 0$, equazione al circolo, prese le coordinate in angolo retto.

Al raggio $CG = \sqrt{mm + nn}$ (fatta per brevità $2m = \frac{9a^3 + 16abb}{16bb}$, e $2n = \frac{27a^4 + 16aabb}{64b^3}$) si descriva il circolo MNH, e presa $CD = m$, (*Fig.* 125.) si conduca dal punto D la DA perpendicolare a CD, ed eguale ad n, che incontrerà nel punto A la periferìa del circolo; per lo punto A si tiri AK parallela ad RG, presa una qualunque $AK = y$, sarà la corrispondente ordinata $KH = x$, ed il circolo il luogo dell'equazione.

Sulla retta AD si prenda $AI = \frac{3aa}{8b}$, e per lo punto I condotta LO parallela ad AK, se ne prenda la porzione $IL = \frac{9a^3}{64bb}$, ed al vertice L, asse LO, parametro $= a$, si descriva la parabola apolloniana ALH; prese dal punto A le assisse y sull'asse AK, saranno le corrispondenti ordinate $KH = x$, e la parabola il luogo dell'equazione $xx - \frac{3aax}{4b} = ay$, la quale incontrerà il

circolo nei quattro punti A, M, H, N; il punto A mi dà la radice da me introdotta eguale a zero, e le tre perpendicolari QM, PN, KH alla AK mi daranno le tre radici dell'equazione. La prima QM positiva servirà per l'angolo ottuso; la seconda negativa PN per l'angolo acuto; la terza KH servirà per dividere in tre parti eguali l'angolo, che è la differenza tra l'angolo dato, e l'angolo retto.

E che ciò sia vero; sia (*Fig.* 123.) l'angolo dato MAB, ad AB sia perpendicolare AH, e si voglia dividere in tre parti eguali l'angolo MAH, differenza fra il dato MAB, e l'angolo retto HAB. Si supponga esser diviso dalle rette AC, AD, ripetuto il discorso del num. 110., sarà $AC = CD$, ed il triangolo ACH simile al triangolo DAH, e però si avrà l'analogìa $CH, HA :: HA, DH$.

Denominando adunque, come nel citato num. 110., $AB = a$, $BR = b$, e chiamata $BC = x$, sarà $RC = x - b$, $BH = \frac{aa}{b}$, $CH = x - \frac{aa}{b}$, $AR = \sqrt{aa - bb}$, $HA = \frac{a}{b}\sqrt{aa - bb}$, $AC = \sqrt{aa + xx - 2bx}$, $DH = x - \frac{aa}{b} + \sqrt{aa + xx - 2bx}$, e però sostituiti nell' analogìa i valori analitici, sarà

$$x - \frac{aa}{b}, \frac{a}{b}\sqrt{aa - bb} :: \frac{a}{b}\sqrt{aa - bb}, x - \frac{aa}{b} + \sqrt{aa + xx - 2bx},$$

cioè

cioè l'equazione

$\frac{aa}{bb} \times \overline{aa - bb} = \overline{x - \frac{aa}{b}} \times \overline{x - \frac{aa}{b} + \sqrt{aa + xx - 2bx}}$, la quale ridotta, e finalmente divisa per $aa - bb$ si trova essere $2bx^3 - 3aaxx + a^4 = 0$, che è appunto l'equazione, che si â costruita.

Oltre gl'angoli minori di due retti, che insistono ad archi minori del semicircolo, e che *Entranti* s'appellano dagli Architetti, si danno pure degl'angoli maggiori di due retti, che insistono ad archi maggiori del semicircolo, e che si chiamano *Salienti*. Si consideri, come positiva, la inclinazione delle due linee AB, AM, (*Fig.* 124.) che mira verso C, negativa quella, che mira verso D. Sino a tanto, che la inclinazione delle due linee AB, AM sarà positiva, e mirerà verso C, l'angolo MAB sarà entrante, minore di due retti, ed insisterà ad un'arco BCM minore del semicircolo. Se le due linee $A2B$, $A2M$ formeranno una linea retta $2B2M$, l'inclinazione sarà nulla. Ma se l'inclinazione diverrà negativa, piegando le linee $A3B$, $A3M$ dalla parte di D, allora l'angolo $3MA3B$ si trasformerà in saliente, maggiore di due retti, ed insisterà ad un'arco $3MC3B$ maggiore del semicircolo. La trisezione adunque di un qualunque angolo dato può anco richiedersi di angolo saliente.

Ora si consideri, che insistendo la linea *AB* sopra la linea *MAE*, (*Fig.* 123.) mentre si forma l'angolo *MAB*, nascono di conseguenza altri tre angoli, cioè l'entrante *BAE*, che unito al parimente entrante dato *MAB* compie i due retti, ed i salienti *MAB*, *BAE*, che uniti ai corrispondenti entranti compiscono i quattro retti.

Le tre radici perciò della nostra equazione $2bx^3 - 3aaxx + a^4 = 0$ servono a tripartire tutti e quattro i mentovati angoli. Col mezzo della più piccola positiva si divide in tre parti eguali l'angolo ottuso *MAB*, e col mezzo della negativa l'angolo acuto *BAE*, come si è veduto; ma si è altresì veduto, che la maggiore positiva serve per l'angolo *MAH*, ora questa appunto serve altresì per tripartire ambedue i salienti *MAB*, *BAE*. E vaglia il vero: l'angolo saliente *BAE* si eguaglia a tre retti più l'angolo *MAH*; la terza parte adunque dell'angolo saliente *BAE* dovrà essere eguale ad un retto più la terza parte dell'angolo *MAH*, e tale si è l'angolo *CAB*. Non altrimenti l'angolo saliente *MAB* equivale a tre retti meno l'angolo *MAH*, o sia *hAE*, e conseguentemente *cAB* sarà la sua terza parte, siccome eguale al retto *hAB* meno l'angolo *hAc* terza parte dell'angolo *hAE*.

217. Se per dividere il dato angolo in tre parti eguali, mi fossi servita del Problema XIII. num. 108., sarei giunta

giunta all'equazione $x^3 - 3bxx - 3rrx + brr = 0$, e moltiplicandola per $x = 0$, $x^4 - 3bx^3 - 3rrxx + brrx = 0$. Quindi preso il luogo alla parabola $xx - \frac{3bx}{2} = by$, e fatto il rimanente al solito, si avrà un' altro luogo al circolo, prese le coordinate in angolo retto, cioè

$$yy - \frac{26b^3y - 24brry}{8bb} - \frac{39b^3x - 28brrx}{8bb} + xx = 0.$$

Descritti, e combinati questi due luoghi, mi daranno la stessa costruzione della Figura 125., diversa solo nelle quantità cognite; imperciocchè sarà in questo caso il raggio del circolo $CG = \sqrt{mm + nn}$ (fatta per brevità $2m = \frac{26b^3 + 24brr}{8bb}$, e $2n = \frac{39b^3 + 28brr}{8bb}$), e sarà $CD = \frac{26b^3 + 24brr}{16bb}$, $DA = \frac{39b^3 + 28brr}{16bb}$, $AI = \frac{3b}{4}$, ed $IL = \frac{9b}{16}$.

218. Dallo stesso Problema si â la maniera generale per dividere un qualunque dato arco, o angolo in quante si vogliano parti eguali; cosicchè per dividerlo in cinque parti eguali, si â l'equazione

$$\frac{5r^4x - 10rrx^3 + x^5}{r^4 - 10rrxx + 5x^4} = b, \text{ cioè}$$

$$x^5 - 5bx^4 - 10rrx^3 + 10brrxx + 5r^4x - br^4 = 0.$$

Per costruirla, prendo il luogo alla parabola apolloniana

na $xx = ry$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo del terzo grado

$$xyy - 5byy - 10rxy + 10bry + 5rrx - brr = 0,$$

cioè $$x = \frac{5byy - 10bry + brr}{yy - 10ry + 5rr}.$$

Descritto adunque il luogo di questa equazione, che sarà (*Fig.* 126.) la curva dei tre rami, cioè HT fra gl'asintoti RK, BC; GMQ fra gl'asintoti DI, KR, ed $fniL$ fra gl'asintoti DF, DI, in cui sull'asse AV sono le y, e le corrispondenti ordinate sono le x. Se al vertice A, col parametro $= r$, all'asse AV si descriverà la parabola dell'equazione $xx = ry$, incontrerà essa la curva in cinque punti o, M, T, i, Q, i quali determineranno le cinque radici or, MN, TV, Si, PQ, tre positive, e due negative dell'equazione proposta.

219. Così per dividere, in quante altre parti eguali si vuole di numero dispari maggiore, un'arco, o angolo dato, altre curve ritroveransi relativamente al grado dell' equazione.



CAPO

CAPO V.

Della coſtruzione de' luoghi, che ſuperano il ſecondo grado.

220. IN due diverſe maniere ſi poſſono coſtruire i luoghi, vale a dire deſcrivere le curve eſpreſſe da equazioni, che ſuperano il ſecondo grado, ſe però nell'una, e nell'altra maniera può dirſi deſcrivere, e non piuttoſto adombrare, e fare qualche idea di tali curve.

La prima maniera è per via d'infiniti punti; la ſeconda col mezzo di altre curve di grado inferiore, e già deſcritte, così che un luogo, o ſia equazione del terzo grado ſi coſtruiſca col mezzo di una retta, e di una ſezione conica; un luogo, o equazione del quarto col mezzo di due ſezioni coniche; un luogo, o equazione del quinto, col mezzo di una ſezione conica, e d'un luogo del terzo, e così di mano in mano per ordine.

221. E quanto alla prima maniera per via d'infiniti punti; in primo luogo fa d'uopo ridurre l'equazione in modo, che una delle due incognite, cioè quella, che ci tornerà più comoda, ſia libera da frazioni, da coefficienti, e che ſia di una ſola dimenſione, e poſta ſola da una parte del ſegno d'egualità, il che ſi potrà ſempre

pre fare coi metodi ſpiegati al Capo II., qualora riſpetto a tale incognita (conſiderando l'altra, come una coſtante) l'equazione ſia di natura ſua piana, cioè non ecceda il ſecondo grado; come per eſempio l'equazione $xyy + 2aay = x^3$, cioè $yy + \frac{2aay}{x} = xx$, la quale trattata con le regole delle quadratiche affette ci dà

$$y = \frac{-aa \pm \sqrt{x^4 + a^4}}{x}.$$

In queſto modo date, o ridotte le equazioni, la maniera di coſtruire il luogo, o ſia la curva da eſſere eſpreſſa, conſiſte nel dare all'una delle due incognite, cioè a quella, che è nell'omogeneo di comparazione, (preſa da un punto fiſſo ſopra una retta, che ſerva per aſſe, o diametro, ſecondo che l'angolo delle coordinate deve eſſere retto, o obbliquo) come ſarebbe alla x nell'equazione $y = \frac{-aa \pm \sqrt{x^4 + a^4}}{x}$; nel dare, diſſi, un valore arbitrario, per mezzo di cui viene ad eſſere dato neceſſariamente il valore dell'altra, cioè della y, la quale dall'eſtremità del valore della prima eſſendo alzata nel dato angolo delle coordinate, ci forniſce un punto della curva da deſcriverſi; un'altro valore, che ſi dia alla ſteſſa incognita x, ſomminiſtra un'altro valore della y, cioè un'altro punto della curva, e così di mano in mano aſſegnando altri valori alla x, altri ſe ne ave-

averanno della y, i quali ci daranno altrettanti punti della curva, il numero de' quali quanto più sarà grande, tanto più sarà esatta la descrizione della curva stessa, e si avrà perfettamente esatta allora solamente, quando se ne abbiano infiniti, anzi un numero infinitamente infinito di tali punti.

222. A motivo di maggiore semplicità supporrò sempre in appresso, che le curve sieno riferite agl'assi, cioè, che l'angolo delle coordinate sia retto, giacchè nel caso, che l'angolo sia obbliquo nessun'altra alterazione succede, che nel dato angolo stesso.

223. Per più facilmente intendere la applicazione del metodo, prendo per primo un'esempio semplice di curva già nota, cioè dell' iperbola equilatera $yy = xx - aa$, vale a dire $y = \pm \sqrt{xx - aa}$.

Sia A il punto fisso principio delle x da prendersi sull'indefinita AE. (*Fig.* 127.) In primo luogo cerco, quale ordinata corrisponda al punto A, cioè cosa sia la y quando $x = 0$; sostituito adunque il zero in luogo della x nella data equazione, troverassi $y = \pm \sqrt{0 - aa}$, cioè y immaginaria, dunque al punto A non corrisponde alcun punto in curva. Se fatta $x = 0$, avessi dall' equazione non y immaginaria, ma $y = 0$, la curva principierebbe dal punto A. Osservo, che qualora sia x minore di a, la radicale $\sqrt{xx - aa}$ sarà sempre di quan-

tità negativa, e però y immaginaria, adunque fatta $AB = a$, ad una qualunque x minore di AB corrisponderà sempre y immaginaria, cioè nessun punto in curva. Prendo $x = a = AB$, sarà $y = \pm \sqrt{aa - aa} = 0$, e però B sarà un punto in curva, vale a dire la curva avrà origine nel punto B. Prendo $x = 2a = AC$, sarà $y = \pm \sqrt{4aa - aa}$, cioè $y = \pm \sqrt{3aa}$, positiva, e negativa; fatta adunque CD positiva, e Cd negativa $= \sqrt{3aa}$, saranno i due punti D, d in curva. Prendo $x = 3a = AE$, sarà $y = \pm \sqrt{8aa}$, fatta perciò EM positiva, ed Em negativa $= \sqrt{8aa}$, saranno i due punti, M, m in curva; e così di mano in mano dando altri valori alla x si averanno altri valori della y. E' facile il vedere, che crescendo la x crescerà sempre la quantità $\sqrt{xx - aa}$, cioè il valore della y positiva, e negativa di modo, che s'anderà sempre più allargando la curva, ed allontanando al di sopra, e di sotto dell'asse, e prendendo finalmente x infinita, poichè il sottrarre quantità finita da infinita è lo stesso, che sottrarre nulla, sarà pure lo stesso $\sqrt{xx - aa}$, che $\sqrt{xx}$, quindi avrassi $y = \pm \sqrt{xx}$, cioè $y = \pm x$; dunque y positiva, e negativa infinita, e però anderà in infinito la curva.

224. E perchè nell'equazione $y = \pm \sqrt{xx - aa}$ la incognita x è elevata a potestà pari, cioè al quadrato, se

ſe ſi prenda la x negativa, nulla ſi altera l'equazione ſteſſa, quindi è, che dando alla x dei valori negativi, cioè prendendola dalla parte di A verſo F, deſcriveraſſi la ſteſſa curva di prima, ma poſta al contrario col vertice H, eſſendo $AH = AB$, ed a neſſuna aſſiſſa x poſitiva, o negativa preſa tra B, ed H corriſponderà ordinata y poſitiva, o negativa reale, vale a dire neſſun punto di curva.

225. Sebbene manifeſtamente ſi vede, che la data curva in neſſun punto fuori de' vertici B, H taglia l'aſſe, poichè creſcendo la x, creſce ſempre la y, nulla di meno però di moltiſſime ſuccede, che oltre il vertice in altri lo taglino, nel qual caſo la y deve neceſſariamente eſſere zero; adunque per avere queſti punti ſi dovrà nella data equazione ſuppore $y = 0$, e ricavare i valori della x in queſta ſuppoſizione, i quali ci daranno i punti cercati. Suppoſta per tanto nell' equazione $yy = xx - aa$ la $y = 0$, ſarà $xx = aa$, cioè $x = \pm a$, adunque ne' ſoli punti B, H la curva taglia l'aſſe, e non in altri.

226. Se fra i punti B, C ſi prenderanno altri valori della x, altri valori corriſpondenti ſi avranno pure della y, cioè altri punti di curva tra B, e D, ovvero d per modo, che quanti più punti tali ſi avranno, più eſatta ſarà la deſcrizione della parte BD, o Bd, nè ſi avrà mai perfetta, ſe non quando i punti ſiano infiniti.

Nella stessa maniera si discorra di qualunque altra porzione.

227. E' chiaro, che se fatta infinita una qualunque delle due incognite, l'altra non sia nè infinita, nè immaginaria, ma o sia finita, o eguale al zero, sarà la prima un' asintoto della curva, il quale corrisponderà al punto determinato dal valore della seconda. Per vedere adunque se una curva â asintoti, e dove, basterà fare la y infinita, e vedere qual valore risulta dalla equazione per la x; indi fare infinita la x, e vedere qual valore risulta per la y. Nell'equazione $y = \pm \sqrt{xx - aa}$, fatta y infinita, sarà $\sqrt{xx - aa} = \infty$, e però $xx = \infty + aa$, cioè xx eguale all'infinito, e però x infinita, perchè la radice di quadrato infinito è sempre infinita; adunque la y non può essere infinita, se non quando sia infinita anche la x, ond' è che l'asse delle y non può essere un'asintoto. Fatta infinita la x, sarà $\sqrt{xx - aa}$ lo stesso che x, poichè a quantità infinita l'aggiungere, o levare quantità finita è lo stesso, che aggiungere, o levare nulla, adunque sarà la $y = \pm x$, cioè fatta x infinita, è infinita anche la y, quindi l'asse delle x non potrà essere un'asintoto.

228. Non così nell'equazione $ay + xy = bb$, che già altronde si sa essere all'iperbola fra gl'asintoti; imperciocchè presa y infinita, saranno infiniti i due termini

ni $ay + xy$, e rispetto a loro sarà nullo il termine bb, e però l'equazione sarà $ay + xy = o$, cioè dividendo per y, $x = -a$, adunque presa $x = -a$, l'ordinata, che in quel punto è infinita, sarà un'asintoto della curva. Presa poi x infinita, poichè i due rettangoli ay, xy nella stessa altezza y sono tra loro, come le basi a, x, sarà il secondo infinitamente maggiore del primo, cioè sarà nullo ay riguardo ad xy; e però cancellato dall' equazione il termine ay, resterà $xy = bb$, o sia $y = \frac{bb}{x}$, ma x è infinita, dunque $y = \frac{bb}{\infty} = o$; sicchè quando $y = o$, la x è infinita, e però è un'asintoto della curva.

229. Si avverta però, che questo metodo â luogo solamente nel caso degl'asintoti paralleli alle coordinate, e non altrimenti; ed in fatti l'iperbola $yy = xx - aa$ â benissimo i suoi asintoti, ma che non sono alle coordinate paralleli, e però in questo caso non serve la maniera spiegata, ma ci vuole altro artifizio, il quale perchè dipende dal metodo degl' infinitesimi, fa d'uopo riservarlo per altro luogo.

230. Rimane il vedere, se la suddetta curva $y = \pm \sqrt{xx - aa}$ sia concava, o convessa all'asse, per la qual cosa prendasi dall'origine una qualunque assissa AE di determinato valore, e col mezzo della data

equa-

equazione si ritrovi il valore della corrispondente ordinata EM; indi presa un'altra assissa AC di determinato valore minore della prima, si trovi il valore della corrispondente ordinata CD, e si conduca la retta BM, che taglierà in I la CD prodotta, se fa di bisogno, ed essendo note le AE, AC, o sia le BE, BC, e la ordinata EM, per la similitudine de' triangoli BEM, BCI troverassi il valore della CI, e se questa sarà minore di CD, la curva sarà concava all'asse AE, com' è chiaro; e se sarà maggiore, la curva sarà convessa. Nella data equazione prendo $x = AE = 3a$, sarà $y = \sqrt{8aa}$, prendo $x = AC = 2a$, sarà $y = CD = \sqrt{3aa}$, e poichè $BE = 2a$, $BC = a$, sarà $CI = \frac{\sqrt{8aa}}{2} = \sqrt{2aa}$, cioè minore di CD, e però la curva concava all'asse AE.

231. Vale però quest'illazione in quelle curve solamente, le quali non abbiano punti di flesso contrario, o di regresso; ma perchè questi ânno i loro metodi particolari, de' quali non è questo il luogo di trattare, quindi è, che per ora non si può formare un'idea giusta, e compita delle curve.

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $y^3 = aax$, cioè $y = \sqrt[3]{aax}$; condotte le due indefinite BH, DC, (*Fig.* 128.) che facciano l'angolo dato BAC eguale a quello delle coordinate, si prendano nella AC dal punto A le x, e sulla AB, o sia parallele alla AB le y. Cerco primieramente, se la curva passa, o nò per lo punto A, cioè cosa sia y quando $x = 0$; ma posta $x = 0$, si trova $y = \sqrt[3]{aa \times 0}$, cioè $y = 0$, adunque la curva passa per lo punto A. Cerco in oltre, se la curva taglia l'asse AC in altro punto, vale a dire cosa sia la x, posta $y = 0$, e trovo $\sqrt[3]{aax} = 0$, cioè $x = 0$; adunque in nessun'altro punto fuori di A la curva taglia l'asse. Faccio $x = AM = \frac{1}{2}a$, e sarà la data equazione $y = \sqrt[3]{\frac{a^3}{2}}$, e però alzata $MP = \sqrt[3]{\frac{a^3}{2}}$, e parallela ad AB, sarà P un punto in curva. Faccio $x = AC = a$, e sarà $y = \sqrt[3]{a^3} = a$, alzata adunque $CN = a$, e parallela ad AB, sarà N un'altro punto in curva; e così facendo successivamente, si troveranno quanti punti si vogliono, per i quali

passa

paſſa la curva della data equazione. Faccio finalmente x infinita, cioè $x = \infty$, e ſarà $y = \sqrt[3]{aa \times \infty}$, cioè y infinita, e però la noſtra curva va all'infinito. E poichè preſa $x = 0$, è pure $y = 0$; e preſa $x = \infty$, è pure $y = \infty$, la curva non avrà aſintoti paralleli alle coordinate.

Si conduca la ſotteſa AN, che taglia in I la MP prodotta, ſe fa biſogno; poichè $AM = \frac{1}{2}a$, $AC = a$, $CN = a$, ſarà $MI = \frac{1}{2}a$, ma $MP = \sqrt[3]{\frac{a^3}{2}}$, adunque MI ſarà minore di MP, e però la curva concava all'aſſe AC.

Si prenda ora la aſſiſſa x negativa. Poichè nella data equazione $y^3 = aax$ la x è di eſponente diſpari, quando ſi prenda negativa dovrà mutare il ſegno, e l'equazione ſarà queſt'altra $y^3 = \sqrt[3]{-aax}$, la quale, come chiaramente ſi vede, prendendo i valori della x dalla parte dei negativi, cioè da A verſo D, ma eguali ai già preſi della parte dei poſitivi, ci darà altrettanti valori negativi della y eguali ai poſitivi, quindi il ramo AE ſarà affatto lo ſteſſo del ramo AN, ma poſto in ſenſo contrario.

ESEM-

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $a^3 - zyy = 0$, cioè $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{z}}$, e si prendano le z dal punto A sull'asse AC. (*Fig.* 129.) Cerco primieramente, se la curva passi per lo punto A, fatta adunque $z = 0$, l'equazione è $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{0}}$, cioè $y = \pm\infty$, adunque BD infinita d'ambe le parti di A sarà un'asintoto della curva. Cerco se in nessun punto la curva tagli l'asse, e però pongo $y = 0$, e l'equazione sarà $\pm\sqrt{\frac{a^3}{z}} = 0$, cioè $0 = \frac{a^3}{z}$, vale a dire $z = \frac{a^3}{0}$, e però $z = \infty$, adunque quando sia $y = 0$ sarà $z = \infty$, e però AC sarà un'altro asintoto. Presa $z = a = AE$, sarà $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{a}}$, cioè $y = \pm a$, fatte adunque EF positiva, ed EG negativa $= a$, saranno i punti F, G in curva. Presa $z = 2a = AH$, sarà $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{2a}}$, cioè $y = \pm\sqrt{\frac{aa}{2}}$, fatte adunque HI positiva, ed HK negativa $= \sqrt{\frac{aa}{2}}$, saranno i punti I, K in curva. Prendendo successivamente nuovi valori di z sempre maggiori, risulteranno

nuovi valori della y sempre minori di modo, che i due rami FI, GK in tutto simili, ed eguali della curva s'anderanno dall'una, e dall'altra parte accostando agl' asintoti BD, AC, senza però mai toccarli, se non in infinita distanza dal punto A.

Rispetto alle assisse z negative, poichè l'esponente di z è dispari, se si prenda negativa, converrà mutare il segno al termine $-zyy$, e l'equazione sarà $a^3 + zyy = 0$, cioè $y = \pm \sqrt{-\frac{a^3}{z}}$, vale a dire l'ordinata y immaginaria, adunque dalla parte delle assisse negative non vi sarà curva.

Per vedere, se la curva sia concava, o convessa all' asse AC; prendo $AC = 3a$, sarà $CM = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, e condotta FM, che tagli in O la HI prodotta, se fa bisogno, ed MN parallela ad AC, sarà $NF = a - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, $PI = \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, e facendo l'analogia $MN, NF :: MP, PO$, cioè $2a, a - \sqrt{\frac{aa}{3}} :: a, PO$, sarà $PO = \frac{a - \sqrt{\frac{aa}{3}}}{2}$, adunque se PO sarà maggiore di PI, la curva sarà convessa all' asse AC, il che si ricerca così. Quando

sia

sia $\frac{a-\sqrt{\frac{aa}{3}}}{2} > \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, sarà anche, moltiplicando per 2, $a - \sqrt{\frac{aa}{3}} > 2\sqrt{\frac{aa}{2}} - 2\sqrt{\frac{aa}{3}}$, ed $a + \sqrt{\frac{aa}{3}} > 2\sqrt{\frac{aa}{2}}$, e quadrando, $aa + 2a\sqrt{\frac{aa}{3}} + \frac{aa}{3} > 2aa$, e moltiplicando per 3, $3aa + 6a\sqrt{\frac{aa}{3}} + aa > 6aa$, e riducendo i termini, $6a\sqrt{\frac{aa}{3}} > 2aa$, e dividendo per $2a$, $3\sqrt{\frac{aa}{3}} > a$, e finalmente quadrando, sarà $\frac{9aa}{3} > aa$, ma è vero, che $\frac{9aa}{3} > aa$, adunque è anche vero, che $\frac{a-\sqrt{\frac{aa}{3}}}{2} > \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, cioè, che *PO* è maggiore di *PI*, ed in conseguenza, che la curva è convessa all'asse *AT*.

ESEMPIO IV.

Sia la curva dell' equazione

$y = \pm\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx \pm a\sqrt{aa + 8ax}}{2}}$. Prendendo sulla *AB* indefinita (*Fig.* 130.) le x dal punto fisso *A*, e

le y sulla AD, che faccia l'angolo DAB delle coordinate, se si ponga $x = 0$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{aa \pm a\sqrt{aa}}{2}}$, cioè $y = \pm \sqrt{\frac{2aa}{2}}$, ed $y = \pm \sqrt{\frac{0}{2}}$, vale a dire $y = \pm a$, ed $y = 0$; adunque fatta AE positiva, e negativa $= a$, i punti E, A, E saranno in curva. Per vedere dove la curva tagli l'asse AB, pongo $y = 0$, e però

$\pm \sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx \pm a\sqrt{aa + 8ax}}{2}} = 0$, e quadrando, e trasponendo, $4ax + aa - 2xx = \mp a\sqrt{aa + 8ax}$, e di nuovo quadrando, $16aaxx + 8a^3x + a^4 + 4x^4 - 16ax^3 - 4aaxx = a^4 + 8a^3x$, e riducendo, e dividendo per $4xx$, $3aa - 4ax + xx = 0$, e risolvendo l'equazione, $x = \pm a + 2a$, cioè $x = a$, ed $x = 3a$; presa adunque $x = AF = a$, ed $x = AB = 3a$, la curva taglierà l'asse ne' punti F, B. Fatta $x = \frac{1}{2}a = AH$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{5aa \pm 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, e però quattro i valori della y reali, per essere $2a\sqrt{5aa}$ minore di $5aa$, e sono $\sqrt{\frac{5aa + 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, $\sqrt{\frac{5aa - 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, $-\sqrt{\frac{5aa - 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, $-\sqrt{\frac{5aa + 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, ed i due positivi sono relativamente eguali ai due negativi; presa adun-

adunque $HI=Hi=\sqrt{\frac{5aa+2a\sqrt{5aa}}{4}}$, ed $HG=Hg=\sqrt{\frac{5aa-2a\sqrt{5aa}}{4}}$, i quattro punti I, G, g, i saranno in curva.

232. Ogni qual volta la quantità sotto al comune vincolo radicale sia quantità negativa (giacchè quella sotto al secondo vincolo, cioè $\sqrt{aa+8ax}$ non lo può essere, essendo le assisse positive, come ora le suppongo) sarà immaginaria la ordinata y, adunque perchè vi sia ordinata, converrà che sia

$$\sqrt{\frac{4ax+aa-2xx\pm a\sqrt{aa+8ax}}{2}}>0.$$

Prendo in primo luogo il segno positivo del secondo radicale, nel qual caso sarà certamente positiva la quantità tutta, se sia $4ax+aa-2xx>0$, cioè $2xx-4ax<aa$, e però $xx-2ax<\frac{aa}{2}$, ed $xx-2ax+aa<\frac{3aa}{2}$, e cavando la radice, $x-a<\sqrt{\frac{3aa}{2}}$, o pure $a-x<\sqrt{\frac{3aa}{2}}$. Dalla prima radice $x-a<\sqrt{\frac{3aa}{2}}$, in cui si suppone x maggiore di a, inferisco, che deve poi essere $x<a+\sqrt{\frac{3aa}{2}}$; dalla seconda $a-x<\sqrt{\frac{3aa}{2}}$

in

in cui si suppone $x < a$ ricavo, che deve poi essere $x > a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$; ma essendo sempre $a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$ quantità negativa, sarà sempre $x > a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$, quando si prenda x minore di a, adunque presa x minore di a, sarà $4ax + aa - 2xx$ quantità positiva, quindi molto più sarà positiva la quantità $4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}$, e però generalmente, presa x minore di AF (a), sarà $y = \pm \sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}}{2}}$, ordinata reale. Ma quando anche sia $4ax + aa - 2xx$ quantità negativa, pure può essere $\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}}{2}}$ quantità positiva, cioè ogni qual volta sia $\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}}{2}} > 0$, e quadrando, e trasportando, $a\sqrt{aa + 8ax} > 2xx - aa - 4ax$, e di nuovo quadrando, $a^4 + 8a^3x > 4x^4 - 16ax^3 + 16aaxx - 4aaxx + 8a^3x + a^4$, cioè $4x^4 - 16ax^3 + 12aaxx < 0$, e dividendo per $4xx$, $xx - 4ax + 3aa < 0$, e però anche $xx - 4ax + 4aa < aa$, e cavando la radice, $x - 2a < a$, come pure $2a - x < a$. Dalla prima radice $x - 2a < a$, che suppone x maggiore di $2a$, viene $x < 3a$, adun-

que

que presa x maggiore di $2a$, ma minore di AB, ($3a$) sarà la radicale positiva, e però reale la ordinata y. Dalla seconda radice $2a - x < a$, che suppone x minore di $2a$, cavo $x > a$, adunque quando anco sia x maggiore di a, e minore di $2a$, la radicale sarà positiva, e però reale l'ordinata y, ma si è veduto per primo, che presa x minore di a, l'ordinta y è reale, adunque generalmente sarà reale la ordinata y, purchè si prenda x minore di AB ($3a$).

Prendendo il segno negativo del secondo radicale, dovrà essere $\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx - a\sqrt{aa + 8ax}}{4}} > 0$, e quadrando, $4ax + aa - 2xx > a\sqrt{aa + 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, e dividendo per $4xx$, sarà $xx - 4ax > -3aa$, e però anche $xx - 4ax + 4aa > aa$, e cavando la radice, $x - 2a > a$; come pure $2a - x > a$; dalla prima radice ricavo $x > 3a$, ma si è veduto, che $x > 3a$ ci dà il valore della y immaginario quando il secondo radicale â il segno positivo, molto più adunque lo darà quando â il segno negativo, onde ommessa questa radice, faccio uso dell'altra $2a - x > a$, che mi dà $x > a$, adunque presa x minore di AF, (a) sarà positiva la quantità sotto il comune vincolo radicale, tanto se si prenda il segno positivo, quanto il negativo del secondo radicale, e però tra A, ed F corrispon-

ponderanno quattro ordinate reali, due positive, e due negative relativamente eguali alle positive. Ma quando sia x maggiore di AF, (a) il segno negativo del secondo radicale dà ordinata immaginaria, e la dà reale il segno positivo, purchè sia x minore di AB, ($3a$) adunque tra F, e B corrisponderanno due sole ordinate reali alla medesima assissa, una positiva, l'altra negativa, ed eguale alla positiva; ed oltre il punto B saranno immaginarie.

Prendansi ora le assisse negative, cioè da A verso K. In questo caso mutando nell'equazione il segno a tutti i termini, che ânno la x d'esponente dispari, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{aa - 2xx - 4ax \pm a\sqrt{aa - 8ax}}{2}}$. Pongo $x = 0$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{aa \pm a\sqrt{aa}}{2}}$, cioè $y = \pm a$, ed $y = 0$, adunque i punti E, A, E saranno in curva, come nel primo caso. Per vedere se la curva taglia l'asse, pongasi $y = 0$, e però $\sqrt{\frac{aa - 2xx - 4ax \pm a\sqrt{aa - 8ax}}{2}} = 0$, e quadrando, e trasponendo, $aa - 2xx - 4ax = \pm a\sqrt{aa - 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, e dividendo per $4xx$, $xx + 4ax + 3aa = 0$, e risolvendo, $x = -2a \pm a$; la curva adunque taglierà l'asse quando sia $x = 0$, essendo stata fatta la divisione per $4xx$; quando sia $x = -3a$;

e

e quando ſia $x = -a$, cioè, per eſſere quantità negative, dalla parte oppoſta a quella, verſo cui ora ſi prendono le x, e però ſolo in A, F, B, come già ſi è veduto. Pongo $x = \infty$ per vedere ſe la curva va all'infinito, o all'aſintoto AK, ed è

$y = \pm \sqrt{-2 \times \infty^2 \pm \sqrt{-8a \times \infty}}$, cioè y immaginaria. Ricerco adunque, quale ſia il limite delle ordinate reali: è certo, che qualora ſia x maggiore di $\frac{a}{8}$, il ſecondo radicale ſarà di quantità negativa, e però immaginaria la ordinata y, adunque deveſi prendere x non maggiore di $\frac{a}{8}$; ma in queſta ipoteſi perchè ſia poſitiva tutta la quantità ſotto il comune radicale, prendendo il ſegno poſitivo del ſecondo, baſterà, che ſia $aa - 2xx - 4ax$ poſitiva, cioè $aa - 2xx - 4ax > 0$, e però $xx + 2ax < \frac{aa}{2}$, o ſia $x < \sqrt{\frac{3aa}{2}} - a$; ma quando ſia x non maggiore di $\frac{a}{8}$, è anche $< \sqrt{\frac{3aa}{2}} - a$, quindi fatta x non maggiore di $\frac{a}{8}$, l'ordinata ſarà reale. Preſo il ſegno negativo del ſecondo radicale, dovrà eſſere

$\sqrt{\frac{aa - 2xx - 4ax - a\sqrt{aa - 8ax}}{4}} > 0$, cioè quadrando, e

trasponendo, $aa - 2xx - 4ax > a\sqrt{aa - 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, $x + 2a > a$, ma $x + 2a$ è sempre maggiore di a, adunque purchè prendasi x non maggiore di $\frac{a}{8}$, le ordinate saranno sempre reali. Prendo $x = \frac{a}{8}$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{15aa}}{8}$, e però fatta KM positiva, e KN negativa $= \frac{\sqrt{15aa}}{8}$, i punti M, N saranno in curva. Prendo $x = \frac{a}{1}$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{95aa \pm 128a\sqrt{\frac{aa}{2}}}}{16}$, cioè quattro valori reali: due positivi relativamente eguali ai due negativi. E perchè la quarta proporzionale di $\frac{a}{8}$, di $\frac{\sqrt{15aa}}{8}$, e di $\frac{a}{16}$, cioè $\frac{\sqrt{15aa}}{16}$ è minore di $\frac{\sqrt{95aa + 128a\sqrt{\frac{aa}{2}}}}{16}$, ma è maggiore di $\frac{\sqrt{95aa - 128a\sqrt{\frac{aa}{2}}}}{16}$; la curva avrà due rami al di sopra di AK, uno concavo, e l'altro convesso, e due ne avrà al di sotto affatto simili, ed eguali a quelli di sopra, e sarà a un di presso come nella *Fig.* 130.

ESEM-

ESEMPIO V.

Sia la curva dell'equazione

$y = \pm \sqrt{\frac{bbx - x^3 + 2axx - aax}{x - 2a}}$; in cui sia, per un caso, a maggiore di b, e si prendano dal punto A sulla indefinita AM le x, e sulla AD nel dato angolo le y, o sia ad essa parallele. (*Fig.* 131.) Fatta $x = 0$, sarà $y = 0$, e però il punto A sarà in curva. Fatta $y = 0$, sarà $\sqrt{\frac{bbx - x^3 + 2axx - aax}{x - 2a}} = 0$, cioè $bbx - x^3 + 2axx - aax = 0$, e dividendo per x, $bb - xx + 2ax - aa = 0$, e però $xx - 2ax + aa = bb$, e cavando la radice, $x - a = \pm b$; adunque i valori della x saranno $x = a + b$, $x = a - b$, ed $x = 0$, essendo stata divisa l'equazione per x. Quindi fatta $AB = BM = a$, $BN = BC = b$, la curva taglierà l'asse nel punto A, come già si è veduto, e ne' punti N, C. Fatta $x = AM = 2a$, sarà y positiva, e negativa infinita, e però in M vi sarà un'asintoto. Pongo $x = \infty$, sarà $y = \pm \sqrt{-xx}$, cioè immaginaria, dunque la curva non va all'infinito. Poichè acciò sia reale l'ordinata y, fa d'uopo, che la quantità sotto il vincolo sia positiva, converrà ch' essendo positivo il numeratore della frazione, lo sia pure il denominatore,

 ed

ed essendo l'uno negativo, lo sia l'altro ancora; ma acciò sia positivo il numeratore, deve essere $bbx - x^3 + 2axx - aax > o$, cioè, dividendo per x, e trasponendo, $xx - 2ax < bb - aa$, e però $xx - 2ax + aa < bb$, e cavando la radice, $x - a < b$, presa x maggiore di a; ed $a - x < b$, presa x minore di a. Dalla prima radice $x - a < b$ cavo $x < a + b$; dalla seconda $a - x < b$ cavo $x < a - b$; presa adunque x maggiore di a dovrà essere $x < a + b$, e presa x minore di a, dovrà essere $x > a - b$, acciò sia positivo il numeratore; ma perchè sia positivo il denominatore, deve essere $x > 2a$, e non potendo essere maggiore di $2a$, ed assieme minore di $a + b$, e di a, non potranno essere positivi il numeratore, e denominatore; e però tra i punti N, e C non vi saranno ordinate reali. Se si prenda $x > a + b$, sarà il numeratore negativo, come pure se si prenda $x < a - b$; e se si prenda $x < 2a$, sarà pure negativo il denominatore; adunque tra A, ed N, e tra C, ed M vi saranno ordinate reali, e la curva sarà a un di presso, come nella *Fig.* 131.

Prendo la x negativa, mutando adunque i segni a' termini della x ad esponente dispari, sarà l'equazione $y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - bbx + 2axx + aax}{-2a - x}}$, cioè $y = \pm \sqrt{\frac{bbx - x^3 - 2axx - aax}{2a + x}}$. Il denominatore sarà

sempre

sempre positivo, ma acciò sia positivo il numeratore, converrà, che sia $bbx - x^3 - 2axx - aax > 0$, e dividendo per x, e trasponendo, $xx + 2ax + aa < bb$, cioè $x + a < b$, e però $x < b - a$, ma si è supposto $b < a$, adunque $b - a$ sarà quantità negativa, e però non potrà mai essere $x < b - a$, cioè non potrà mai essere positivo il numeratore, quindi le ordinate y saranno sempre immaginarie, onde dalla parte delle assisse negative non vi sarà curva.

ESEMPIO VI.

Sia l' equazione $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, cioè $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$. Dal punto fisso A (*Fig.* 132.) sulla indefinita AQ prendo le y, e sulla indefinita AM, o ad essa parallele nel dato angolo delle coordinate, prendo le x. Posta $y = 0$, sarà $x = \frac{2aa}{0}$, cioè $x = \infty$, adunque la curva anderà all'asintoto AM. Per vedere, se la curva taglia l'asse, e dove, pongo $x = 0$, e però $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = 0$, e risolvendo quest' equazione cubica si ânno tre valori della y, cioè $y = a$, $y = 2a$, $y = -a$. Fatta adunque $AB = AD = BC = a$, ne' punti B, C dalla parte de' positivi, e nel punto D dalla parte de' negativi la curva taglierà l'asse.

233. Se l'equazione $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ fosse irriducibile, onde non si potessero avere i valori aritmetici della y, s'avrebbe a costruire essa equazione, ed i valori della y geometricamente ritrovati, e colle linee espressi, ci darebbero i punti ricercati, il che s'intenda detto di qualunque caso simile. Pongo $y = \frac{3a}{2}$, e sarà $x = -\frac{5a}{12}$, cioè ordinata negativa, adunque la curva passa al di sotto dell'asse AQ in B, e torna al di sopra in C. Pongo $y = \infty$, sarà $x = \frac{yy}{a}$, cioè $x = \infty$, e però la curva anderà all'infinito. E' chiaro, che il ramo infinito BE sarà convesso all'asse AM, il ramo BC concavo all'asse AQ, e CF convesso, quando la curva non abbia flessi contrarj.

Si prendano ora le assisse y negative da A verso D, sarà adunque l'equazione $x = \frac{-y^3 - 2ayy + aay + 2a^3}{-ay}$, cioè $x = \frac{y^3 + 2ayy - aay - 2a^3}{ay}$. Prendo $y = 0$, sarà $x = -\frac{2aa}{0} = -\infty$, adunque MA infinitamente prodotta dalla parte dei negativi sarà pure asintoto della curva. Prendo $y = \frac{1}{2}a$, sarà $x = -\frac{15a}{4}$; prendo $y = a$, sarà $x = 0$, e la curva passerà per D; prendo $y = \infty$, sarà $x = \frac{yy}{a} = \infty$, e la cur-

curva al di ſopra di AD anderà all' infinito; prendo $y = 3a = AK$, ſarà $x = \frac{40a}{3} = KP$; prendo $y = 2a = AN$, ſarà $x = 6a = NR$; quindi perchè condotta la retta DP, ſarà $NT = \frac{40a}{6}$, e $\frac{40a}{6} > 6a$, adunque ſarà $NT > NR$, e la curva in R conveſſa all'aſſe AK, cioè concava all'aſſe AM; ma ſe eſſa va all'aſintoto AV al di ſotto di AK, neceſſariamente deve anche eſſere ad eſſo conveſſa, adunque avrà un fleſſo contrario, per determinare il quale non è queſto il luogo.

234. Ma ſe la propoſta equazione della curva da coſtruirſi conterrà ambe le incognite elevate a maggiore poteſtà della ſeconda, onde non poſſa generalmente ridurſi tale, che da una parte del ſegno d'egualità abbia una delle due incognite ſola, e di una ſola poteſtà, allora creſcerà bensì l'operazione, ma non la difficoltà del metodo, imperciocchè fiſſato un valore noto per l'una delle incognite, per eſempio x, ſi avrà un'equazione ſolida data per y, e le coſtanti, da riſolverſi o coſtruirſi, da cui ſi averanno i valori della y, che determineranno tanti punti in curva.

Indi fiſſato un'altro valore per la x, averaſſi un'altra equazione ſolida da riſolverſi o coſtruirſi, che ci ſomminiſtrerà altri punti in curva; e così di mano in mano ſucceſſivamente operando, ſi troveranno quanti

punti

punti si vogliono della curva da descriversi.

235. Ma dovendosi in questi incontri, ed in altri ancora, come nell'esempio sesto, risolvere e costruire equazioni solide, pare, che si faccia un circolo vizioso, poichè trattando de' problemi solidi ô supposta la descrizione delle curve anche superiori alle sezioni coniche; ma la cosa non è così, se bene si riflette, imperciocchè se la curva da descriversi è della terza, o quarta dimensione, della terza o quarta al più sarà l'equazione solida da costruirsi, il che si fa per mezzo delle sezioni coniche; adunque senza circolo vizioso descriverassi qualunque curva della terza, o quarta dimensione. Se l'equazione della curva da descriversi sarà della quinta dimensione, l'equazione solida da costruirsi sarà al più della quinta, il che si farà per mezzo d'una curva della terza, e di una della seconda, e similmente si discorra di dimensioni superiori; dal che apparisce, non esservi ombra di circolo vizioso.

PROBLEMA I.

236. *Dato il semicircolo* AEB, (Fig. 133.) *si dimanda il luogo de' punti* M *tali, che se per ciascuno di essi si tiri dall'estremità* A *del diametro una retta, che taglierà la periferìa in* D, *e si abbassino le* MP, DO *perpendicolari al diametro, le intercette dal centro* CP, CO *sieno sempre eguali tra loro.* Sia

Sia M uno dei punti, che si cercano, e si chiami $AB=a$, $AP=x$, $PM=y$, e poichè deve essere $CP=CO$, sarà $OB=AP=x$, ed $OD=\sqrt{ax-xx}$, e per la similitudine de' triangoli APM, AOD, sarà $x, y :: a-x, \sqrt{ax-xx}$, e però $y=\frac{x\sqrt{ax-xx}}{a-x}$, cioè $y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$, o pure $y=\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$, equazione della curva da descriversi, che è la *Cissoide di Diocle*.

Per descriverla sulla data Figura per varj punti: si osservi, che la retta AB è l'asse delle x, ed A il punto, da cui ânno origine, e perchè le y sono perpendicolari a questo asse, condotta dal punto A la tangente AQ; sarà essa l'asse, a cui le ordinate y debbono riferirsi. Queste cose premesse, si ponga in primo luogo $x=o$ per vedere se la curva taglia l'asse AQ, e perchè si ritrova pure $y=o$, sarà A un punto nella curva da descriversi. Si ponga $y=o$ per vedere se la curva taglia l'asse AB in qualche altro punto, ma poichè si trova $x=o$, non incontrerà la curva i due assi in altro punto, fuorchè in A.

Sia $x=\frac{1}{3}a$, sarà $y=\frac{a}{3\sqrt{2}}$; sia $x=\frac{1}{2}a$, sarà $y=\frac{1}{2}a$, e però eretta dal centro la perpendicolare CE al diametro AB, passerà la curva per lo punto E.

 Sia

Sia $x = \frac{2a}{3}$, sarà $y = \frac{4a}{3\sqrt{2}}$, e posta finalmente $x = a$, si trova $y = \frac{aa}{0} = \infty$, e perciò la tangente *BR* al circolo sarà l'asintoto della curva. Prendo *x* maggiore di *a*, sarà negativa la quantità sotto il segno radicale nel denominatore, e la curva immaginaria, la quale essendo pure immaginaria, presa la *x* negativa, sarà compresa fra le due tangenti *AQ*, *BR* prodotte in infinito. E poichè va all'asintoto *BR*, non avendo flessi contrarj, converrà, che sia tutta convessa all'asse *AB*, e sarà, come nella *Fig.* 133.

PROBLEMA II.

237. *Dato l'angolo retto* ABC, (Fig. 134.) *e dato il punto* A *nel lato* AB, *si cerca il luogo di tutti i punti* M *tali, che condotte per ciascuno di essi le rette linee* AE, *terminate dal lato* BC *nei punti* E, *sia sempre* EM = EB.

Si tiri una qualunque retta *AE*, e sia *M* uno dei punti, che si cercano; si abbassi dal punto *M* ad *AB* la perpendicolare *MP*, e si chiami $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, sarà $PB = a - x$, ed $AM = \sqrt{xx + yy}$, ma per i triangoli simili *APM*, *ABE*, sarà $x, y :: a, BE$, dunque $BE = EM = \frac{ay}{x}$, ma è anche $AP, PB :: AM, ME$,

cioè

cioè $x, a-x :: \sqrt{xx+yy}, \frac{ay}{x}$, dunque $ay = \overline{a-x}\sqrt{xx+yy}$, e quadrando, $aayy = aaxx - 2ax^3 + x^4 + aayy - 2axyy + xxyy$, cioè $\frac{aaxx - 2ax^3 + x^4}{2ax - xx} = yy$, e finalmente, essendo la radice di $aaxx - 2ax^3 + x^4$ tanto $ax - xx$, quanto $xx - ax$, sarà $y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, ed $y = \frac{xx - ax}{\sqrt{2ax - xx}}$, cioè $\pm y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, equazione alla curva, che si cerca.

Le ordinate y saranno adunque positive, e negative, ed eguali fra loro, e le positive e le negative corrisponderanno alla medesima assissa, e però la curva sarà al di sopra, ed al di sotto dell'asse AB in tutto simile, ed eguale.

Condotta dal punto A la perpendicolare AR alla AB, la quale sarà l'asse, a cui si rapportano le ordinate y, siccome AB è quello delle assisse x; pongo in primo luogo $x = 0$ per vedere se la curva passa per lo punto A, e perchè trovo parimenti $y = 0$, sarà il punto A il vertice della curva. Sia ora $y = 0$, sarà $ax - xx = 0$, e però $x = 0$, ed $x = a$, onde ricavo, che la curva passerà per lo punto B. Sia $x = \frac{1}{3}a$, sarà $\pm y = \frac{2a}{3\sqrt{5}}$. Sia $x = \frac{1}{2}a$, sarà $\pm y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Sia $x = \frac{4a}{3}$, sarà $\pm y = \frac{4a}{3\sqrt{8}}$. Sia $x = 2a$, sarà $\pm y = \frac{2aa}{0} = \infty$, e perciò,

 presa

presa $AD = 2a$, e condotta la retta SQ indefinita parallela alla PM, sarà essa l'asintoto della curva. Sia x maggiore di $2a$, sarà negativa la quantità sotto il vincolo radicale, e però immaginaria l'ordinata y, adunque oltre il punto D non vi sarà più curva. E' chiaro, che la curva tra il punto A, ed il punto B sarà concava all'asse AB, e poichè oltre al punto B va all'asintoto SQ, sarà tra B, e D convessa all'asse BD; intendendo però, che non abbia flessi contrarj.

Presa la x negativa, sarà sempre negativa la quantità sotto il vincolo radicale, e però immaginaria l'ordinata y; adunque dalla parte delle assisse negative non vi sarà curva, quindi sarà essa a un di presso, come nella *Fig.* 134.

PROBLEMA III.

238. *Dato il semicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC; *si ricerca fuori di esso il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *sia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti sono i punti* M, *che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo.*

Sia M uno di questi punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, sarà, per la proprietà del circolo,

lo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, sarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax - xx} :: a, y$; e però $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$, o sia $y = \frac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da descriversi, che dicesi la *Versiera*.

Poichè $AB = x$, $BM = y$, sarà AC l'asse delle x, ed AQ, parallela alla BM, l'asse delle ordinate y. Si ponga primieramente $x = 0$, sarà $y = \infty$, e però AQ l'asintoto della curva. Sia $y = 0$, sarà $a\sqrt{a - x} = 0$, e però $x = a$; quando adunque sia $x = a$, la curva taglierà l'asse AC, e passerà per conseguenza per lo punto C, che ne sarà il vertice. Sia $x = AR = \frac{a}{2}$, sarà $y = a$; sia $x = AP = \frac{3a}{4}$, sarà $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; sia $x = AF = \frac{4a}{5}$, sarà $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$. Posta x maggiore di a, la quantità sotto il segno radicale sarà negativa, e la curva immaginaria. Per vedere se la curva sia concava, o convessa all' asse AC, si faccia la proporzione: come $CP = \frac{a}{4}$ (che corrisponde alla $x = \frac{3a}{4}$) alla $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, così $CF = \frac{1}{5}a$ (che corrisponde alla $x = \frac{4a}{5}$) al quarto, che sarà $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$; ma la $x = \frac{4a}{5}$ ci dà $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$, e $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$ è minore di $a\sqrt{\frac{1}{4}}$, adunque sarà la curva concava all' asse AC; ma per l'asin-

l'asintoto AQ deve anche essere convessa, adunque sarà in parte concava, ed in parte convessa, e però avrà un flesso contrario, il quale si troverà col metodo da darsi a suo luogo; e perchè, presa la x negativa, è negativa la quantità sotto il vincolo radicale del denominatore, cioè immaginaria la y, perciò la curva sarà, come si vede nella *Fig.* 135. avvertendo, che essa curva â un ramo simile, ed eguale al ramo CLM, dalla parte delle y negative.

PROBLEMA IV.

139. *Data la retta indefinita* NN, (Fig. 136.) *e dato un punto* P *fuori della medesima, si domanda il punto* M *tale, che condotta da esso al punto* P *la retta* MP, *sia la intercetta fra la linea indefinita* NN, *ed il punto* M, *eguale ad una data linea, e perchè infiniti sono i punti, che soddisfanno, si cerca il luogo di essi punti.*

Si tiri dal punto P la retta PA perpendicolare alla NN, e la retta PM ad un qualunque punto M, che si supponga essere uno di quelli, che si cercano, e condotta la retta ME parallela alla NN, si chiami $PS = b$, $SE = x$, $EM = y$, e sia $SA = a$ la data linea, a cui deve essere eguale la retta NM, per la condizione del problema. Si tiri dal punto N la retta NO perpendicolare alla

alla EM, sarà $MO = \sqrt{aa - xx}$, e per i triangoli simili PEM, NOM; PE, EM :: NO, OM, cioè $b + x$, y :: x, $\sqrt{aa - xx}$, e però $\overline{b + x}\sqrt{aa - xx} = xy$, e quadrando, $xxyy = aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 + aabb - bbxx$, e finalmente

$$y = \pm \frac{\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 + aabb - bbxx}}{x},$$ equazione alla curva da descriversi, che è la *Concoide di Nicomede*.

Tre diversi casi possono distinguersi in questo problema; cioè può essere $b = a$; può essere b minore di a; e finalmente b maggiore di a. Sia in primo luogo $b = a$, si muterà l'equazione nella seguente

$$y = \pm \frac{\sqrt{-x^4 + 2a^3x - 2ax^3 + a^4}}{x}.$$

Poichè $SE = x$, $EM = y$, sarà NN l'asse, a cui si riferiscono le y, e PA quello delle x, delle quali S è l'origine. Pongo in primo luogo $x = 0$, per vedere se la curva passa per lo punto S, e perchè ne viene $y = \pm \frac{aa}{0}$, cioè y infinita positiva, e negativa, sarà NN l'asintoto della curva; pongo $y = 0$ per vedere dove la curva taglia l'asse PA, e sarà $-x^4 + 2a^3x - 2ax^3 + a^4 = 0$, onde risoluta colle regole già insegnate quest'equazione, le radici di essa ci determineranno i

punti

punti, ne' quali la curva incontra il detto asse PA; ma quattro sono le radici di quest' equazione, cioè $x = a$ positiva, e tre eguali negative $x = -a$, dunque la curva incontrerà l'asse in due punti lontani dal punto S la quantità a, ma perchè non si tratta per ora, che delle x positive, basterà considerare il valore positivo, e però la curva passerà per lo punto A, essendo, come si è supposto, $SA = a$. Sia $x = \frac{1}{2}a$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{27aa}}{2}$. Sia $x = \frac{2a}{3}$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{125aa}}{6}$. Sia x maggiore di a, sarà negativa la quantità sotto il vincolo radicale, essendo in quest' ipotesi il primo termine maggiore del quarto, ed il terzo maggiore del secondo, onde presa la x maggiore di a, sarà la curva immaginaria. Resta da vedersi se sia sempre essa curva convessa all'asse PA, giacchè in parte deve esserlo per cagione dell'asintoto NN. Si faccia adunque la proporzione: come $AE = \frac{1}{2}a$ (la quale corrisponde alla $x = \frac{1}{2}a$) alla $y = \frac{\sqrt{27aa}}{2}$, così $AI = \frac{1}{3}a$ al quarto, che sarà $\frac{\sqrt{27aa}}{3}$, ma $AI = \frac{1}{3}a$ corrisponde alla $x = \frac{2a}{3}$, e perciò alla $y = \frac{\sqrt{125aa}}{6}$, e la $\frac{\sqrt{125aa}}{6}$ è maggiore di $\frac{\sqrt{27aa}}{3}$, dunque la curva sarà in parte concava all' asse PA, ed

in

in conſeguenza avrà un fleſſo contrario, come ſi vedrà a ſuo luogo. E perchè al medeſimo valore della x corriſpondono due valori eguali della y, l'uno poſitivo, l'altro negativo, avrà la curva un'altro ramo dalla parte delle y negative ſimile, ed eguale a quello dalla parte delle poſitive, e ſarà, come ſi vede deſcritta nella *Fig.* 136.

Per deſcrivere la curva dalla parte delle x negative, converrà cambiare i ſegni de' termini, ne' quali la incognita è elevata a poteſtà diſpari, onde ſarà l'equazione $y = \pm \frac{\sqrt{-x^4 - 2a^3x + 2ax^3 + a^4}}{-x}$. Sia in primo luogo adunque $x = 0$, ſarà $y = \pm \frac{aa}{0}$, e perciò NN l'aſintoto della curva anche dalla parte dei negativi. Sia $y = 0$, ſarà $-x^4 - 2a^3x + 2ax^3 + a^4 = 0$, da cui ſi ricavano, come ſopra, quattro radici; tre eguali poſitive $x = a$, ed una negativa $x = -a$. La radice negativa, che era poſitiva nel caſo anteriore, ſi è già fiſſata nella concoide ſuperiore; i tre valori eguali poi ſignificano, che nel polo, diſtante appunto la quantità a dall'origine delle x, avrà la curva un regreſſo, di cui ſi tratterà nel metodo dei fleſſi contrarj. Sia $x = \frac{1}{2}a$, ſarà $y = \pm \frac{\sqrt{3aa}}{2}$; ſia $x = \frac{2a}{3}$, ſarà $y = \pm \frac{\sqrt{5aa}}{6}$. Si prenda x maggiore di a, ſarà la curva immaginaria,

perchè essendo la quantità sotto il vincolo radicale il prodotto di $xx - 2ax + aa$, quantità sempre positiva, in $aa - xx$, che in questa ipotesi è negativa, sarà negativa tutta la quantità sotto il segno radicale, e però immaginaria la ordinata y. Si faccia ora la proporzione: come $PR = \frac{1}{2}a$ (fatta $SR = \frac{1}{2}a$) alla $\frac{\sqrt{3aa}}{2}$, così $PQ = \frac{1}{3}a$ (fatta $SQ = \frac{2a}{3}$) al quarto, che sarà $\frac{\sqrt{3aa}}{3}$, ma alla $SQ = \frac{2a}{3}$, cioè alla $PQ = \frac{a}{3}$ corrisponde la $y = \frac{\sqrt{5aa}}{6}$, e $\frac{\sqrt{5aa}}{6}$ è minore di $\frac{\sqrt{3aa}}{3}$, adunque sarà sempre convessa la curva all'asse NN, (supposto, che non abbia flessi contrarj) ed avrà due rami simili, ed eguali fra loro, corrispondendo alla stessa x due valori eguali della y, l'uno positivo, l'altro negativo, e però sarà, come si vede descritta inferiormente nella *Fig.* 136.

240. Sia ora b minore di a, l'equazione è adunque

$$y = \pm \frac{\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 + aabb - bbxx}}{x}.$$

Pongo $x = 0$, sarà $y = \pm \frac{ab}{0} = \pm \infty$, e però NN (*Fig.* 137.) anche in questo caso l'asintoto della curva; sia $y = 0$, sarà $aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 + aabb - bbxx = 0$,

le

le di cui quattro radici (cioè $x = \pm a$, e due tra loro eguali $x = -b$) determineranno i punti, ne' quali la curva taglia l'asse PA; ma per ora basterà considerare il valore positivo $x = a$, e perchè $SA = a$, sarà A il vertice della curva. Pongo $x = \frac{1}{2}a = SE$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{3aa + 12ab + 12bb}}{2} = EM$. Pongo $x = \frac{2a}{3} = SI$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{20aa + 60ab + 45bb}}{6} = IK$. Faccio la proporzione: $AE\ (\frac{1}{2}a)$, $EM\ (\frac{\sqrt{3aa + 12ab + 12bb}}{2}) :: AI\ (\frac{1}{3}a)$ al quarto IV, che sarà $\frac{\sqrt{3aa + 12ab + 12bb}}{3}$, per vedere se la curva è concava, o convessa all'asse SA; ma presa $AI = \frac{1}{3}a$, si â $SI = \frac{2a}{3}$, a cui corrisponde $IK = y = \frac{\sqrt{20aa + 60ab + 45bb}}{6}$, e si trova essere $IV (\frac{\sqrt{3aa + 12ab + 12bb}}{3})$ minore di $IK (\frac{\sqrt{20aa + 60ab + 45bb}}{6})$, dunque sarà la curva concava all'asse SA; ma poichè va all'asintoto NN, sarà pure convessa, e però avrà un flesso contrario.

E' chiaro, che presa l'assissa oltre il punto A, cioè la x maggiore di a, non vi sarà curva, poichè il se-

condo termine del radicale ſarebbe maggiore del primo, il quarto maggiore del terzo, il ſeſto maggiore del quinto, e però negativa la quantità ſotto il vincolo, cioè immaginaria la y.

E perchè alla ſteſſa aſſiſſa x corriſpondono due ordinate y eguali, una poſitiva l'altra negativa, ſarà la curva la ſteſſa anche dalla parte delle ordinate negative, ed a un di preſſo, come nella *Fig.* 137.

Per deſcrivere la curva dalla parte delle aſſiſſe x negative, muto il ſegno nell'equazione ai termini, ne' quali la x è a poteſtà diſpari, ed è

$$y = \pm \frac{\sqrt{aaxx - x^4 - 2aabx + 2bx^3 + aabb - bbxx}}{-x}.$$

Pongo $x = 0$, e trovo $y = \pm \frac{ab}{0}$, cioè infinita, e però NN ſarà pure l'aſintoto. Pongo $y = 0$, e ſarà $aaxx - x^4 - 2aabx + 2bx^3 + aabb - bbxx = 0$; le quattro radici di queſt'equazione, che ſono, due $x = \pm a$, e due eguali $x = b$, determinano i punti, dove la curva taglia l'aſſe AP. La negativa $x = -a$ mi dà il punto A, la poſitiva $x = a$ il punto m, e le due eguali $x = b$ il punto P, che ſarà un nodo della curva; preſa $PR = SR = \frac{1}{2} b = x$, ſarà $y = \pm \frac{\sqrt{4aa - bb}}{2} = RT$; preſa $PQ = \frac{1}{3} b$, cioè $SQ = x = \frac{2}{3} b$, ſarà $y = \pm \frac{\sqrt{9aa - 4bb}}{6} = QH$. Faccio

l'ana-

l'analogia $PR\ (\frac{1}{2}b)$, $RT\ (\frac{\sqrt{4aa-bb}}{2})$ :: $PQ\ (\frac{1}{3}b)$, $QO\ (\frac{\sqrt{4aa-bb}}{3})$, per vedere se la curva è concava, o convessa all'asse PS, ma $QO\ (\frac{\sqrt{4aa-bb}}{3})$ è maggiore di $QH\ (\frac{\sqrt{9aa-4bb}}{6})$, adunque la curva è convessa all'asse PS, e seguita ad esserlo, andando all'asintoto NN.

Presa l'assissa oltre il punto m, cioè x maggiore di a, non vi sarà curva, perchè il radicale $\sqrt{aaxx - x^4 - 2aabx + 2bx^3 + aabb - bbxx}$ è lo stesso, che $\sqrt{aa - xx \times xx - 2bx + bb}$, ma posta x maggiore di a, sarà $aa - xx$ quantità negativa, ed $xx - 2bx + bb$ è quantità positiva, adunque negativo il prodotto, e però immaginaria la ordinata y. Presa l'assissa oltre il punto P, cioè x maggiore di b, ma però minore di a, sarà $aa - xx$, come pure $xx - 2bx + bb$, quantità positiva, e però positivo il prodotto, e reale la ordinata y, adunque tra P, ed m corrisponderà pure la curva, e sarà essa la foglia $Pxmy$ col nodo in P, e la curva sarà a un di presso, come nella *Fig.* 137.

241. Sia finalmente b maggiore di a, l'equazione è la stessa del caso anteriore, e prese le assisse x positive,

tive, è pure simile la curva, prese poi le x negative, e supposta $y=0$, le quattro radici dell'equazione, cioè $x=\pm a$, e le due eguali $x=b$ danno bensì i medesimi punti A, m, P nell'asse PA; ma il punto m è al di sopra del punto P, ed assunta l'assissa maggiore di Sm, cioè x maggiore di a, sarà $aa-xx$ quantità negativa, e perchè è $xx-2bx+bb$ quantità positiva, sarà negativo il prodotto, e però immaginaria l'ordinata y, adunque la curva non avrà la foglia dell'anteriore, ma avrà in m il vertice. E poichè la curva è prima concava, e poi convessa all'asse PS, come facilmente si può vedere, e va all'asintoto NN, sarà a un di presso, come nella *Fig.* 138.

242. Questo metodo di descrivere le curve per infiniti punti può forse ridursi a maggior perfezione col servirsi anche di costruzioni geometriche. Ne darò alcuni esempj, i quali basteranno a mettere la cosa in chiaro.

ESEMPIO I.

Vogliasi costruire per varj punti la curva del Problema I. num. 236., che è la Cissoide di Diocle, la di cui equazione si è trovata essere $y=\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$.

Col

Col raggio $AC = \frac{1}{2}a$ (*Fig.* 133.) descritto il circolo $AEBe$, e presa ad arbitrio $AP = x$, osservo, che la corrispondente ordinata Pf è $= \sqrt{ax - xx}$; per lo punto f tiro il diametro fCD, e congiunti i punti A, D colla linea AD, il punto M, in cui essa taglia l'ordinata superiore PF continuata, se fa bisogno, sarà alla Cissoide. Imperciocchè essendo retto l'angolo nel semicircolo fAD, siccome pure l'angolo APM delle coordinate, saranno simili i triangoli AfP, APM, e però sarà l'analogìa fP, $AP :: AP$, PM, cioè $\sqrt{ax - xx}$, $x :: x, y$, onde sarà $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$, il che ec.

In altra maniera: poichè sono simili i triangoli PCf, CDO, per esser retti gl'angoli P, O, ed eguali gl'angoli al vertice PCf, DCO; ed in oltre $Cf = CD$, sarà anco $CP = CO$, proprietà della curva.

ESEMPIO II.

Sia la curva del Problema II. num. 237, la di cui equazione è $\pm y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Col raggio $AB = a$ (*Fig.* 134.) si descriva il circolo AFD, presa una qualunque $AP = x$, si tiri dal punto P l'ordinata $PF = \sqrt{2ax - xx}$, e condotto il raggio BF, si tiri AHE ad

ad esso normale, taglierà questa l'ordinata PF continuata, se bisogna, nel punto M, che sarà alla curva AMB, che si cerca. Imperocchè essendo simili i due triangoli AMP, FMH, ed in oltre simili i triangoli FMH, FBP, sarà il triangolo AMP simile al triangolo BFP, e però si avrà $PF, PB :: AP, PM$, cioè $\sqrt{2ax - xx}, a - x :: x, y$, onde si ricava l'equazione proposta $\frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}} = y$, il che ec.

In altra maniera: poichè il triangolo AMP è simile al triangolo AHB, e si è veduto di sopra, che il triangolo AMP è simile pure al triangolo FPB, sarà il triangolo AHB simile al triangolo FPB, ma il lato $AB = BF$, dunque sarà anche $BH = BP$; si tiri la retta MI parallela ad AB, saranno simili i triangoli BHE, MIE, ma saranno anche fra loro equilateri, essendo $BH = BP = MI$, dunque sarà $EB = EM$, che è la proprietà fundamentale della curva proposta.

ESEMPIO III.

Sia da descriversi la Versiera del Problema III. num. 238., la di cui equazione è $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$. Essendo il diametro del circolo $AC = a$, e presa ad arbitrio

trio una qualunque $AB = x$, (*Fig.* 135.) si tirino le indefinite BM, CE perpendicolari ad AC, indi per lo punto D, in cui la BM taglia il circolo, si tiri AD, che prodotta taglierà CE in E, dal punto E si abbassi una parallela ad AC, incontrerà essa la BM nel punto M, che appartiene alla curva. In fatti, per la proprietà del circolo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e, per i triangoli simili ABD, ACE, è AB, $BD :: AC$, CE, cioè x, $\sqrt{ax - xx} :: a$, $CE = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x} = y$, equazione della curva.

ESEMPIO IV.

Sia da descriversi per varj punti la Concoide di Nicomede del Problema IV. num. 239., la di cui equazione $\pm y = \frac{b \pm x\sqrt{aa - xx}}{\pm x}$; sia $SA = Sa = a$, $SP = b$, col raggio $SA = a$ si descriva il circolo $ABCa$, (*Fig.* 139.) e prese ad arbitrio due assisse SE, Se tra loro eguali, che si chiamino x, positive, e negative, si tirino le ordinate EB, eC, ciascuna delle quali sarà $= \sqrt{aa - xx}$, e si producano oltre i punti B, C indefinitamente, per i punti S, B si tiri la retta SB, e per lo punto P ad essa si tiri parallela la PM; i due punti M, m, ne' quali la PM taglia le due rette EB, eC,

apparterranno alla curva, che si cerca, vale a dire il punto M al ramo superiore, ed il punto m al ramo inferiore della Concoide.

E quanto al punto M: poichè sono simili i due triangoli SEB, PEM, sarà $SE, EB :: PE, EM$, cioè $x, \sqrt{aa-xx} :: b+x, y$; e conseguentemente l'equazione $y = \frac{\overline{b+x}\sqrt{aa-xx}}{x}$ spettante al ramo superiore della Concoide.

Riguardo poi al punto m, condotta la linea SC, sarà il triangolo SeC eguale al triangolo SEB, ma il triangolo Pem è simile al triangolo SEB, dunque sarà anco simile al triangolo SeC, e però si avrà l'analogìa $Pe, em :: Se, eC$, cioè $-x, \sqrt{aa-xx} :: b-x, y$, onde si ricava l'equazione $y = \frac{\overline{b-x}\sqrt{aa-xx}}{-x}$, che è appunto quella, che appartiene al ramo inferiore della curva.

Condotta per lo punto S la indefinita SN parallela alle ordinate EM, em, facilmente si ricava dalla costruzione superiore la principale proprietà della Concoide, cioè, che se dal polo P si condurrà la PM, la quale tagli la curva nei punti M, m, e la SN nel punto N, saranno le intercette mN, NM fra la curva, e la indefinita SN di lunghezza sempre costante, ed

eguali

eguali ad $SA = SB = a$. Imperciocchè per la costruzione sarà $SBMN$ un parallelogrammo, e però $NM = SB$, ma condotta NO parallela ad Se, sono simili i triangoli SBE, mNO, ed in oltre $NO = Se = SE$, dunque sarà $mN = SB$, ed in conseguenza $mN = NM$, il che ec.

243. Le costruzioni dei primi tre Esempj riescono assai semplici, non essendosi in esse adoperati se non che circoli di dato diametro, e rette linee. In altri incontri verranno ad uso le sezioni coniche, descritte anche tal' ora con diametri, parametri, e rettangoli variabili, ma che si prendono come costanti per determinare uno, o più punti della curva.

Per darne un' esempio: vogliasi costruire per punti la curva dell' equazione $x\sqrt{2ax - xx} = yy$ (*Fig.* 140.) Descritto il circolo $AHBh$, il di cui diametro $AB = 2a$, prendo ad arbitrio $AD = KB = x$, sarà $DE = KI = \sqrt{2ax - xx}$. Col parametro DE, all'asse AB descrivo la parabola apolloniana $GFAfg$, e DF, Df daranno i valori positivo, e negativo di y, posta $x = AD$; KG, Kg i valori positivo, e negativo di y, posta $x = AK$. I quattro punti per tanto F, f, G, g saranno nella curva cercata. Con simil metodo, variato il valore della x, si determineranno altri punti della nostra curva.

244. La seconda maniera di costruire le curve superiori al secondo grado sarà, come ô detto al num. 220., per

mezzo di altre linee di grado inferiore; e per cominciare dalle parabole di qualunque grado, si osservi primieramente, che la parabola apolloniana è una sola, e si esprime coll'equazione $ax = yy$; le cubiche sono due, cioè $aax = y^3$, $axx = y^3$; quelle del quarto grado sono tre, cioè $a^3x = y^4$, $aaxx = y^4$, $ax^3 = y^4$. Quelle del grado n sono $n - 1$, cioè $ax^{n-1} = y^n$; $aax^{n-2} = y^n$; $a^3x^{n-3} = y^n$; $a^4x^{n-4} = y^n$, e così successivamente sin' a tanto, che l'esponente della x sia l'unità.

245. Tutte quelle, che ânno la x coll'esponente dell' unità, si chiamano parabole prime, onde $aax = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^{n-1}x = y^n$ sono tutte parabole prime.

Per costruire qualunque parabola di qualsivoglia grado, si dia principio dalla parabola prima cubica $aax = y^3$.

E' manifesto, che questa averà due rami, uno positivo, negativo l'altro, imperocchè pigliando la x positiva, sarà positiva anche la y, cioè $y = \sqrt[3]{aax}$, e questo sarà il ramo positivo. Ma pigliando la x negativa, sarà negativa anche la y, cioè $y = \sqrt[3]{-aax}$, (che non è punto quantità immaginaria) e questo sarà il ramo negativo. E' chiaro, che i due rami vanno all'infinito, e sono concavi all'asse AB. (*Fig.* 141.)

Per passare alla costruzione: si ponga $yy = az$, e sostituendo nell'equazione $aax = y^3$, in luogo di yy, questo

ſto valore az, l'equazione alla parabola cubica ſi muterà in queſt' altra $ax = zy$, che ſi riſolve nella ſeguente analogìa $a, z :: y, x$.

Ciò poſto, all'aſſe AB ſi deſcriva la parabola dell' equazione $yy = az$, e ſia DAE. Sia $AB = z$, $BE = y$, $BD = -y$, $AC = a$, e ſi conduca CB, e per lo punto A la linea KAF parallela alla CB, e fatta $AG = BE$, ſi tiri GE, ſarà $CA, AB :: AG, GF$, cioè $a, z :: y, x$, onde preſa ad arbitrio la AB, le corriſpondenti BE, o ſia AG, e GF ſaranno le coordinate della noſtra parabola cubica, ed F ne ſarà un punto; imperocchè reſtituendo nell'analogìa $a, z :: y, x$ il valore di z, cioè $\frac{yy}{a}$, ſarà $a, \frac{yy}{a} :: y, x$, che appunto ci dà l'equazione $y^3 = aax$.

Ma perchè, quando ſi prenda x negativa, anche y è negativa, l'analogìa $a, z :: y, x$ ſi muterà nella ſeguente $a, z :: -y, -x$; onde preſa $AV = BD$, ſarà $CA, AB :: AV, VK$, cioè $a, z :: -y, -x$, ed il punto K ſarà nella parabola cubica. Il ramo AMF ſarà il poſitivo, ed il ramo ANK il negativo.

246. Sia propoſta da coſtruirſi la parabola prima del quarto grado $a^3x = y^4$. Queſta avrà pure due rami, uno ſopra l'aſſe, l'altro al di ſotto, perchè alla x poſitiva corriſponde tanto y, quanto $-y$, per eſſere l'indice della poteſtà della y di numero pari. Queſti due rami ſaran-

ranno concavi all'asse, ed anderanno all' infinito. Per passare alla costruzione, faccio $y^3 = aaz$, e sostituendo in luogo di y^3 questo valore nell'equazione proposta, si avrà $zy = ax$, o sia $a, z :: y, x$.

All' asse KC (*Fig.* 142.) si descriva la parabola dell'equazione $y^3 = aaz$, che, per essere la prima cubica, già si sa costruire, e sia questa la QAD, sarà $AC = GD = z$, $AK = -z$, $CD = AG = y$, $KQ = -y$. Prendasi $AB = a$, e si tirino le rette BC, BK, e per lo punto A sia AF parallela a BC, ed AP parallela a KB, ciò posto, sarà $BA, AC :: AG, GF$, cioè $a, z :: y, x$, ed il punto F sarà nella curva proposta da costruirsi; imperocchè essendo $a, z :: y, x$, ed essendo ancora $z = \frac{y^3}{aa}$, sarà $a, \frac{y^3}{aa} :: y, x$, cioè $a^3 x = y^4$.

Ma poichè, essendo x positiva, si può prendere la y anche negativa, che in questo caso sarà la KQ, e la AK sarà $-z$, avrassi pure $BA, AK :: KQ$ (cioè AR), RP, o sia $a, -z :: -y, x$, e però il punto P sarà nella curva $a^3 x = y^4$.

247. Sia proposta da costruirsi la parabola prima del quinto grado $a^4 x = y^5$. Questa ancora avrà due rami, uno positivo, negativo l'altro; imperocchè pigliando x positiva, sarà y positiva, cioè $y = \sqrt[5]{a^4 x}$, ma pigliando x negativa, sarà y negativa, cioè $y = \sqrt[5]{-a^4 x}$.

Questi

Questi due rami vanno all'infinito, e sono concavi all' asse AB. Per passare alla costruzione: faccio $y^4 = a^3 z$, e sostituendo questo valore nell'equazione proposta, sarà $ax = yz$, o sia $a, z :: y, x$.

All'asse AB (*Fig.* 141.) si descriva la parabola dell' equazione $y^4 = a^3 z$, e sia DAE. Essendo $AB = z$, sarà $BE = y$, $BD = -y$. Sia $AC = a$, e si conduca CB, e ad essa parallela la KAF, indi si tiri la retta EFG, e la parallela DVK. Ciò posto, sarà $CA, AB :: AG, GF$, ($a, z :: y, x$) ed il punto F sarà nella curva proposta da costruirsi; imperocchè essendo $a, z :: y, x$, ed essendo ancora $a^3 z = y^4$, sarà $a, \frac{y^4}{a^3} :: y, x$, cioè $y^5 = a^4 x$.

Ma perchè essendo x negativa, anche la y sarà negativa, l'analogìa $a, z :: y, x$ si muta nella seguente $a, z :: -y, -x$, onde presa $AV = DB$, sarà $CA, AB :: AV, VK$ ($a, z :: -y, -x$), ed il punto K sarà nella curva proposta da costruirsi. Il ramo AMF sarà il positivo, ed il ramo ANK il negativo.

248. Generalmente sia proposta da costruirsi la parabola $a^{n-1} x = y^n$. Facciasi $y^{n-1} = a^{n-2} z$, e sostituendo questo valore nell'equazione proposta, si avrà sempre $zy = ax$. Onde si scopre, che si potrà sempre costruire qualunque parabola prima per mezzo del triangolo, e della parabola prima del prossimo grado inferiore.

249. Ora sarà facile passare alla costruzione dell'altre para-

parabole ancora, cioè alla costruzione delle seconde, terze, quarte ec. di qualunque grado; anzi queste pure si sono costruite nella costruzione delle prime.

Sia proposta da costruirsi la seconda parabola cubica $axx = y^3$. Pongo $y^3 = aaz$, dunque sostituendo nell' equazione proposta, in luogo di y^3, il suo valore aaz, sarà $xx = az$.

All'asse AB (*Fig.* 143.) si descriva la parabola apolloniana AC dell'equazione $xx = az$, indi allo stesso asse si descriva la prima parabola cubica dell' equazione $y^3 = aaz$, ed essendo $AB = z$, sarà $BE = y$, ma nella parabola apolloniana AC, essendo $AB = z$, sarà $BC = x$, dunque si avranno sempre le due coordinate x, y della seconda parabola cubica.

Sia proposta da costruirsi la parabola terza del quarto grado $ax^3 = y^4$. Pongo $a^3 z = y^4$, dunque sostituendo, sarà $x^3 = aaz$. Sia costruita la parabola prima cubica $x^3 = aaz$, ed al medesimo asse si costruisca pure la prima del quarto grado $y^4 = a^3 z$. Le due ordinate di queste curve corrispondenti alla medesima assissa z daranno le coordinate x, y dell' equazione proposta $ax^3 = y^4$.

In tutte le altre di qualunque grado superiore si proceda collo stesso metodo, bastando i dati esempj, per essere la cosa da se chiara.

250. Solo rimane da osservarsi, che la parabola seconda del quarto grado $aaxx = y^4$ non è altro, che la

la parabola apolloniana, ma raddoppiata in ſenſo contrario. E primieramente ſe è $aaxx = y^4$, ſarà anche, eſtraendo la radice quarta, $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt{ax} = \pm y$. Ora $\sqrt{ax} = \pm y$, o ſia $ax = yy$, altro non è, che l'equazione alla parabola apolloniana. La noſtra curva poi è una parabola apolloniana raddoppiata, poichè il termine $aaxx$ viene egualmente generato tanto da $+\overline{ax} \times \overline{+ax}$, quanto da $\overline{-ax} \times \overline{-ax}$, verificandoſi del pari, eſſere $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt[4]{\overline{+ax} \times \overline{+ax}} = \sqrt[4]{\overline{-ax} \times \overline{-ax}} = \sqrt{ax} = \pm y$. Alle x negative per tanto corriſpondono le y reali, ed il ramo MAN della parte dei negativi (*Fig.* 144.) ſarà affatto ſimile al BAC dalla parte dei poſitivi, avverandoſi riſpetto ad entrambi l'equazione $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt{ax} = \pm y$. Ma la parabola apolloniana non â il ramo dalla parte dei negativi, poichè poſta x negativa, ſi â $\sqrt{-ax} = \pm y$, curva immaginaria.

Se ſi alzerà l'equazione $ax = yy$ alla terza poteſtà, la curva corriſpondente alla equazione $a^3 x^3 = y^6$ non ſarà, che la ſola parabola apolloniana. Alzata l'equazione $ax = yy$ alla quarta poteſtà, la curva corriſpondente alla formola $a^4 x^4 = y^8$ torna ad eſſere la parabola appolloniana raddoppiata in ſenſo contrario. Generalmente ſe la poteſtà, a cui ſi alza la formola $ax = yy$,

ſarà pari, ſoddisfarà la parabola apolloniana raddoppiata; e ſe ſarà diſpari, ſoddisfarà la parabola apolloniana ſemplice.

Una tale dottrina ſi può applicare a tutte le parabole, ed iperbole prime, la di cui equazione canonica ſi è (prendendo per n un numero qualunque intiero affermativo, o negativo) $a^{n-1}x = y^n$. Alzata queſta a potestà pari, la curva propria della nuova equazione ſarà la parabola, o iperbola $a^{n-1}x = y^n$ raddoppiata in ſenſo contrario. Se la poteſtà ſarà diſpari, ſvanirà il raddoppiamento, e reſterà la curva ſemplice propria dell'equazione $a^{n-1}x = y^n$.

251. Dalla coſtruzione delle parabole di qualunque grado ſi fa paſſaggio alla coſtruzione degl' Iperboloidi pure di qualunque grado.

Gli iperboloidi del terzo grado ſono due, cioè $a^3 = xxy$, $a^3 = xyy$. Sia propoſto da coſtruirſi l'iperboloide dell'equazione $a^3 = xxy$. Queſta curva avrà due rami, che vanno agl'aſintoti, e l'uno, e l'altro avrà le ordinate poſitive, ma le aſſiſſe in uno ſaranno poſitive, negative nell'altro.

Per coſtruirla: pongo $xx = az$, e ſoſtituendo, ſarà $aa = zy$. Fra gl' aſintoti AM, AG (*Fig.* 145.) ſi deſcriva l'iperbola FQ dell'equazione $aa = zy$. Preſa adunque $AG = z$, ſarà $GF = y$, indi dal punto G in angolo ſemiretto ſi ſi conduca GB, e ſarà $AB = AG = z$; all'aſſe AB ſi deſcri-

descriva la parabola CAE dell'equazione $az = xx$, indi condotte le ordinate BC, BE, e le indefinite CK, EP parallele alla BA, sarà $AH = BE = x$, e tirata FK parallela a GD, sarà $HP = GF = y$. Istessamente sarà $AD = BC = -x$, $DK = y$, ed i punti P, K saranno nella curva proposta.

Ommetto la costruzione dell'equazione $a^3 = xyy$, perchè è la medesima, mutandosi solo le veci delle coordinate.

252. Sia proposto l'iperboloide del quarto grado, e sia l'equazione $a^4 = x^3 y$. Questa curva avrà due rami, che vanno agl'asintoti, in uno de' quali sarà x positiva, ed y positiva, e nell'altro x negativa, ed y negativa.

Pongo $x^3 = aaz$, dunque sostituendo, si avrà $zy = aa$. Fra gl'asintoti MF, TG, (*Fig.* 146.) indefinitamente prodotti, si descriva l'iperbola ER, KO dell'equazione $zy = aa$, e sarà $AF = z$, $FE = y$, $AM = -z$, $MK = -y$; dal punto F si tiri FG in angolo semiretto, a cui sia parallela MT, e sarà $AG = AF = z$; $AT = AM = -z$. All'asse TG si descriva la parabola cubica SAH dell'equazione $x^3 = aaz$, e sarà $AI = GH = x$, $AP = TS = -x$; onde condotte le rette EC, KV parallele alla AI, sarà $IC = y$, $PV = -y$, ed i punti C, V nella curva proposta.

Quì pure ommetto la costruzione dell'equazione $a^4 = xy^3$, perchè è la medesima, mutandosi solo le ve-

ci delle coordinate. Ommetto ancora la costruzione dell' equazione $a^4 = xxyy$, perchè questa si riduce all' iperbola apolloniana.

253. Sia proposta la curva iperboloide del quinto grado, e sia in primo luogo l'equazione $a^5 = x^4 y$. Questa avrà due rami, che vanno agl' asintoti, in uno de' quali presa x positiva, sarà pure positiva la y; nell' altro presa la x negativa, ciò non ostante, sarà la y positiva.

Pongo $x^4 = a^3 z$, dunque sostituendo, sarà $aa = zy$. Fra gl' asintoti AG, AM si descriva l' iperbola apolloniana FQ dell' equazione $aa = zy$, (*Fig.* 145.) onde presa $AG = z$, sarà $GF = y$. Dal punto G in angolo semiretto si conduca la GB, e sarà $AB = AG = z$. All' asse AB si descriva la parabola CAE dell' equazione $x^4 = a^3 z$, e sarà $BE = AH = x$, $BC = AD = -x$, e condotta FK parallela alla GD, e le CK, EP perpendicolari alla stessa, sarà $HP = DK = GF = y$, ed i punti P, K nella curva proposta.

Sia l' altra equazione $a^5 = x^3 yy$ dell' iperboloide dello stesso grado, questa avrà due rami, imperocchè alla stessa x positiva corrispondono due ordinate y, una positiva, negativa l'altra.

Pongo $x^3 = aaz$, dunque sostituendo, sarà $a^3 = zyy$. Fra gl' asintoti DM, CN (*Fig.* 147.) sia descritto l' iperboloide RG, FV dell' equazione $a^3 = zyy$, ed essendo

do $AH = y$, $AP = -y$, sarà $HI = z = PK = AB$. All'asse PH si descriva la parabola cubica AS dell'equazione $x^3 = aaz$, indi dal punto B si conduca ad angolo semiretto la BQ, e si alzi la perpendicolare QS, sarà adunque $AQ = z$, $QS = x$. Per lo punto S si conduca la retta OT parallela all'asintoto NC, e che incontri le prodotte HI, PK ne' punti T, O; essendo adunque $AH = y$, sarà $HT = x$, $AP = -y$, $PO = x$, ed i punti O, T saranno nella curva proposta.

Le costruzioni dell' altre due equazioni $a^5 = xxy^3$, $a^5 = xy^4$ sono le medesime, mutandosi solo le veci delle coordinate. Con lo stesso artifizio si costruiranno facilmente tutti gl'iperboloidi di qualunque grado.

254. E' da notarsi, che tutte le parabole prime descritte intorno ad un'asse medesimo si tagliano nel medesimo punto; imperciocchè presa per ciascuna di esse la medesima assissa $x = a$, sarà per tutte la medesima ordinata corrispondente $y = a$, il che non può essere se non tagliandosi tutte nel medesimo punto.

255. In oltre, le parabole superiori di dimensioni (intendendo delle prime) cadono prima di arrivare al punto della sezione al di sopra delle inferiori, avvicinandosi più alla tangente nel vertice, e dopo la sezione più quelle, che queste, si accostano all'asse; poichè essendo nella parabola apolloniana $y = \sqrt{ax}$,

nella

nella prima cubica $y = \sqrt[3]{aax}$, nella prima del quarto grado $y = \sqrt[4]{a^3x}$ ec., se si prenda x minore di a, sarà $\sqrt{ax}$ minore di $\sqrt[3]{aax}$, e $\sqrt[3]{aax}$ minore di $\sqrt[4]{a^3x}$ ec.; ed all'opposto, presa x maggiore di a, sarà $\sqrt{ax}$ maggiore di $\sqrt[3]{aax}$, e $\sqrt[3]{aax}$ maggiore di $\sqrt[4]{a^3x}$ ec.

Istessamente, e per simil ragione gli iperboloidi (intendendo pure de' primi) si tagliano tutti nel vertice, ed i superiori di dimensioni cadono dopo il punto della sezione al di dentro tra gl' inferiori, e l'asintoto, su cui si prendono le x; e dalla parte dell'asintoto parallello alla y gl'inferiori cadono al di dentro tra i superiori, e l'asintoto stesso.

256. Restano ora da costruirsi quelle equazioni, che ânno più termini, le quali io distinguo in tre casi. Chiamo del primo caso quelle, che ânno un solo termine, in cui sia l'indeterminata y, e questa di una sola dimensione. Del secondo caso quelle, che ânno un solo termine, in cui sia l' indeterminata y, e questa elevata a qualunque potestà. Del terzo caso quelle, in molti termini delle quali si ritrova l'indeterminata y, ed elevata a qualunque potestà.

CASO

CASO I. ESEMPIO I.

257. Sia proposta da costruirsi la curva dell' equazione $a^4 - x^4 = a^3 y$. Pongo $y = t - q$, e faccio le due equazioni $a^4 = a^3 t$, $x^4 = a^3 q$. All'asse AB (*Fig.* 148.) descrivasi la parabola MAC dell'equazione $x^4 = a^3 q$, ed essendo $AD = q$, sarà $DH = x$, $DF = -x$. Ma per l'equazione $a^4 = a^3 t$, sarà $t = a$, e però presa $AB = a = t$, sarà $DB = t - q$, cioè $= y$; onde presa ad arbitrio una qualunque assissa $BS = DH = x$, e $BO = DF = -x$, le SH, OF, parallele a BA, saranno le corrispondenti ordinate della curva proposta, la quale è una porzione della medesima parabola del quarto grado.

ESEMPIO II.

258. Sia proposta da costruirsi la curva dell'equazione $x^4 + ax^3 = a^3 y$. Questa curva, per le regole già note, si fa avere tre rami, due infiniti, e positivi, ed uno negativo con un massimo, che per ora non si fa riconoscere, e l'asse sarà tagliato in due punti. Pongo $y = z + t$, e faccio le due equazioni $x^4 = a^3 z$, $x^3 = aat$. All'asse AB (*Fig.* 149.) si descriva la parabola MAD dell'equazione $x^4 = a^3 z$, ed essendo $AF = z$, sarà $FD = AE = x$. Per lo medesimo punto A si descriva la parabola

rabola cubica CAP dell'equazione $x^3 = aat$, ed alla medesima x corrisponderà $PE = t$, onde essendo $AE = x$, sarà $PE + ED = z + t = y$, fatta PD parallela alla AF, dal che si vede, che presa x positiva, la y cresce in infinito.

Presa poi x negativa, sarà t negativa, e per conseguenza $y = z - t$. Sia $AG = x$ negativa, sarà $GM = z$, $GT = t$, onde $y = MT$ negativa, e fra tutte le MT vi è una massima. Presa $x = -a$, sarà $GM = GT$, onde $y = 0$. Presa x negativa, e maggiore di a, sarà $GM - GT$ quantità positiva, onde la y sarà positiva, e crescerà in infinito.

La curva sarà a un di presso della seguente forma, prendendo le x dal punto A. (*Fig.* 150.)

ESEMPIO III.

259. Sia proposta da costruirsi la curva dell'equazione $x^4 + ax^3 - aaxx = a^3 y$. Questa curva avrà quattro rami; due positivi, ed infiniti; due negativi, e finiti. In due punti taglierà l'asse, ed in uno lo toccherà, avrà due massimi negativi ec.; il che si saprà dalle regole da darsi a suo luogo.

Pongo $y = z - q$, e faccio le due equazioni $x^4 + ax^3 = a^3 z$, $-xx = -aq$. La curva dell'equazione $x^4 + ax^3 = a^3 z$ già si sa costruire in virtù di questo metodo, e sia

ſia queſta $CBADG$, (*Fig.* 151.) in cui preſa $AK=x$ poſitiva, ſarà $KG=z$; preſa x negativa $=AP$, ſarà z negativa $=PB$, preſa x negativa, e maggiore di AO, ſarà z poſitiva. All'aſſe AN ſi deſcriva la parabola TAH dell'equazione $xx=aq$. Eſſendo dunque $AK=x$ poſitiva, ſarà $KH=q$, e $GH=z-q=y$, la quale creſcerà in infinito, creſcendo la x in infinito. Nel punto F, ſarà $z=q$, ed $y=o$. Fra il punto F, ed il punto A, ſarà q maggiore di z, onde $z-q$ ſarà quantità negativa, ed y negativa, e vi ſarà un maſſimo negativo. Nel punto A ſarà $z=o$, $q=o$, $y=o$. Preſa x negativa $=AP$, ſarà $z=BP$, e negativa, onde ſempre y negativa. Fra il punto A, ed il punto O vi ſarà una maſſima BQ, onde vi ſarà una maſſima y negativa. Preſa x negativa, e maggiore di AO, ſarà z poſitiva, ma minore di q, onde y negativa. Preſa x negativa, ed eguale ad AM, ſarà $z=q$, ed $y=o$. Preſa x negativa, e maggiore di AM, ſarà ſempre z maggiore di q, onde ſempre y poſitiva in infinito.

Se l'equazione ſarà più numeroſa di termini, lo ſteſſo artifizio ſervirà, ed abbenchè la coſtruzione in queſto caſo ſi faccia più compoſta, ed imbrogliata, tuttavìa però non ſfugge il metodo.

Si poteva in altra maniera ancora coſtruire l'ultima equazione, facendo $y=z+t-q$, indi $x^4=a^3z$, $x^3=aat$, $-xx=-aq$, e col mezzo di queſte tre curve auſiliarie

rie passare alla costruzione della principale, il che ommetto per brevità.

260. Può forse sembrare, che nelle passate costruzioni, e nelle poche, che seguono, sia necessario che l'angolo delle coordinate sia retto, essendosi tale supposto; ma se ben si rifletta, si vedrà, che esso angolo può essere, come si vuole, quando si usi qualche piccola attenzione intorno all'angolo delle coordinate delle curve sussidiarie introdotte, relativamente all'angolo delle coordinate dell'equazione proposta.

CASO II. ESEMPIO IV.

261. Sia proposta da costruirsi l'equazione $x^n \pm a^s x^{n-s} \pm a^m x^{n-m} \pm \text{ec.} = y^t$. Pongo $y^t = a^{t-1}z$, e sostituendo questo valore in luogo della y^t, l'equazione sarà $x^n \pm a^s x^{n-s} \pm a^m x^{n-m} \pm \text{ec.} = a^{t-1}z$: col metodo del primo caso si costruisca questa curva, poscia si descriva la parabola dell'equazione $y^t = a^{t-1}z$, e si avrà la relazione tra le x, e le y della curva proposta.

CASO

CASO III. ESEMPIO V.

262. Sia proposta da costruirsi l'equazione

$$x^m \pm ax^n \pm bx^s \pm \text{ ec.} = y^p \pm y^q \pm \text{ ec.}$$

Pongo $y^p \pm y^q \pm$ ec. $= z$, dunque sostituendo, l'equazione sarà $x^m \pm ax^n \pm bx^s$ ec. $= z$. Col metodo del primo caso si costruisca l'una, e l'altra di queste due curve ausiliarie al medesimo asse, in cui si prendono le z, e si avrà la relazione delle due coordinate x, ed y della curva proposta.

263. Sino ad ora non sono state da me considerate se non quelle equazioni, che ânno le incognite separate, così che, quando esse incognite sono miste fra loro, le regole date non ânno più luogo.

In questi casi bisogna, o con l'ordinaria divisione, o con l'estrazione delle radici, o con una congrua sostituzione, o con altri ripieghi procurare di separare le indeterminate medesime. Come se fosse l'equazione $a^3y + axxy = aaxx + x^4$, dividendo per $a^3 + axx$, sarebbe $y = \frac{aaxx + x^4}{a^3 + axx}$; e se fosse l'equazione $aaxy + xxyy = x^4 + a^4$, fatta la sostituzione $z = \frac{yx}{a}$; avremmo l'equazio-

 ne

ne $a^3z + aazz = x^4 + a^4$, nella quale le incognite sono separate.

Così preparate le proposte equazioni, si passa alla costruzione nella seguente maniera.

ESEMPIO VI.

264. Sia l'equazione da costruirsi $y = \frac{aaxx + x^4}{a^3 + axx}$.

Pongo $aaxx + x^4 = a^3p$; pongo di più $a^3 + axx = aat$, e sostituendo questi valori nell'equazione proposta, sarà $y = \frac{ap}{t}$, cioè $t, p :: a, y$.

La curva proposta avrà due rami, che vanno all' infinito; alle x tanto positive, quanto negative corrisponderanno le y positive.

All'asse HD (*Fig.* 152.) si descriva la curva LAC dell'equazione $aaxx + x^4 = a^3p$, e pigliando $AD = x$, sarà $DC = p = AB$. Si prenda $AF = a = AM$, indi col vertice F, all'asse HD si descriva la curva PFE dell' equazione $a^3 + axx = aat$, e pigliando $AD = x$, sarà $DE = t$, onde essendo $DC = p$, sarà $DE = t$, e fatta EG parallela ad AD, dal punto G si tiri in angolo semiretto la GH, sarà $AH = t$. Dal punto C si tiri

CB

CB parallela a DA, e si conduca la retta BH, a cui sia parallela MK, sarà $AK = y$, essendo $AD = x$; imperocchè, per i triangoli simili AMK, AHB, sarà AH, $AB :: AM$, AK, cioè t, $p :: a$, $AK = \frac{ap}{t} = y$, onde condotta parallela all'asse la KQ, saranno le AD, DQ le due coordinate della curva proposta. Per avere l'altro ramo della nostra curva, basta prendere le x dalla parte dei negativi, e replicare nella parte contraria la medesima costruzione.

ESEMPIO VII.

265. Sia ora proposta da costruirsi l'altra equazione $aaxy + xxyy = x^4 + a^4$, la quale trattata colle regole delle quadratiche affette avrà le incognite separate; ovvero colla sostituzione $z = \frac{xy}{a}$ si ridurrà ad essere $a^3 z + aazz = x^4 + a^4$. Col metodo del terzo caso si costruisca questa equazione, e si averanno le due coordinate x, z; indi si faccia l'analogìa x, $z :: a$ al quarto, che sarà la y ec. Se una sostituzione non gioverà per liberare le indeterminate dalla confusione, se ne devono tentare dell'altre, e quando niuna serva, le equazioni sfuggono il metodo esposto, onde bisogna ricorrere ad altri artifizj.

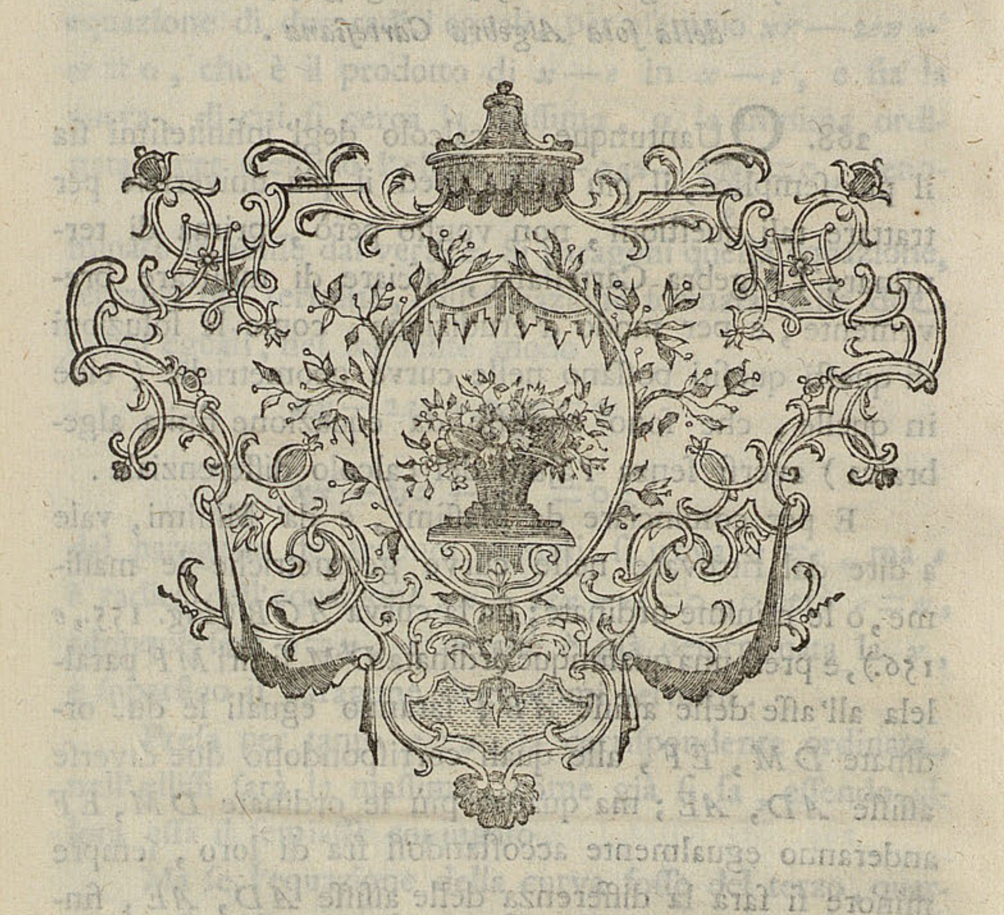
266. Una congrua sostituzione può servire negl'altri casi ancora, ne' quali le indeterminate sono separate, e quindi alle volte somministrare una costruzione più facile, e più elegante, e però sarà sempre bene mettere alla prova diversi artifizj, ed in fine appigliarsi a quello, che si giudicherà migliore.

ESEMPIO VIII.

267. Sia l'equazione $y^4 - 4ay^3 + 4aayy = 2a^3x$. Faccio $2a^3x = z^4$, e però sarà $y^4 - 4ay^3 + 4aayy = z^4$; cioè $yy - 2ay = zz$, o pure $2ay - yy = zz$.

Costruisco adunque questo luogo, che sarà nel primo caso alle due Iperbole equilatere opposte coll'asse trasverso $= 2a$; ed al Circolo nel secondo caso col diametro $= 2a$, e generalmente a quelle, ed a questo insieme. Al diametro trasverso $AB = 2a$ (*Fig.* 153.) sieno descritte le due iperbole equilatere AMH, BMH, ed il circolo AMB; indi descritta al vertice A la parabola dell'equazione $2a^3x = z^4$, ed alzata la perpendicolare AQ indefinita, e presa una qualunque $AD = z$, indi condotta MM parallela ad AB, saranno le $DS = x$, e le $DM = y$ positive nel circolo, e nell'iperbola da A verso B; e ne-

negative nell' iperbola dalla parte opposta, e la curva sarà a un di presso, come *KAGBF*, (*Fig.* 154.) in cui i due rami *AK* negativo, e *BF* positivo vanno all' infinito, nè avrà ramo alcuno al di sotto dell' asse *AB*, perchè non può mai avere la x negativa.



CAPO

CAPO VI.

Del metodo de' Massimi, e Minimi, delle Tangenti delle Curve, de' Flessi contrarj, e Regressi, facendo uso della sola Algebra Cartesiana.

268. QUantunque il calcolo degl' infinitesimi sia il più semplice, il più breve, ed il più universale per trattare tali questioni, non voglio però, prima di terminare l'Algebra Cartesiana, lasciare di mostrare brevemente, e per modo d'erudizione, come le soluzioni di questi quesiti possano nelle curve geometriche (cioè in quelle, che sono espresse da equazione finita algebraica) aversi senza l'ajuto del calcolo differenziale.

E per cominciare da' Massimi, e da' Minimi, vale a dire dal ritrovare nelle curve geometriche le massime, o le minime ordinate; sia la curva AGB (*Fig.* 155., *e* 156.), e presa una qualunque ordinata DM, si tiri MF parallela all'asse delle assisse AB, saranno eguali le due ordinate DM, EF, alle quali corrispondono due diverse assisse AD, AE; ma quanto più le ordinate DM, EF anderanno egualmente accostandosi fra di loro, sempre minore si farà la differenza delle assisse AD, AE, finche cadendo finalmente le due ordinate DM, EF nella massi-

massima CG, o le due LM, NF nella minima IG, si saranno eguali le assisse AD, AE, o le HL, HN rispetto all'asse HK. Adunque quando l'ordinata sia la massima, o la minima, l'equazione della curva disposta secondo la lettera, che esprime l'assissa, dovrà avere due radici eguali. Per determinarle si formi un' equazione di due radici eguali, per esempio $xx - 2ex + ee = 0$, che è il prodotto di $x - e$ in $x - e$, e sia la curva, di cui si cerca la massima, o la minima ordinata, per esempio l'ellisse $xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$, denominate le assisse dal vertice. Si paragoni questa equazione, termine per termine, coll'equazione formata dalle due radici eguali, nel seguente modo

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$$
$$xx - 2ex + ee = 0;$$

dal paragone de' secondi termini si trova $a = e$, ma e è radice dell'equazione $xx - 2ex + ee = 0$, e però $e = x$, adunque sarà $a = x$, e perchè è già determinata la x, è superfluo il paragone degl'ultimi termini.

Presa per tanto $x = a$, la corrispondente ordinata nell'ellissi sarà la massima, come già si sa, essendo allora essa il semiasse conjugato.

Ma se l'equazione della curva fosse del terzo, quarto, o superiore grado, a fine di potere instituire il pa-

 rago-

ragone, fa d'uopo, che l'equazione delle due radici eguali $xx - 2ex + ee = 0$ si riduca a quel grado, di cui è la proposta, moltiplicandola per tante radici qualunque esse sieno, quante fanno di bisogno. Sia la curva dell'equazione del terzo grado $x^3 * - axy + y^3 = 0$ (la stelletta è posta in luogo del secondo termine mancante, il che si osservi sempre qualora manca un qualche termine) di cui si cerchi la massima ordinata, moltiplico adunque per $x - f = 0$ l'equazione $xx - 2ex + ee = 0$, ed il prodotto lo paragono colla proposta

$$\begin{array}{l} x^3 \quad * \quad - axy + y^3 = 0 \\ \left.\begin{array}{l} x^3 - 2exx + eex - eef \\ \quad\; - fxx + 2efx \end{array}\right\} = 0. \end{array}$$

Dal paragone de' secondi termini trovo $-2e - f = 0$, e però $f = -2e$; dal paragone de' terzi trovo $2ef + ee = -ay$, e posto il valore di f, $-3ee = -ay$, ma $e = x$, adunque $y = \frac{3xx}{a}$. Si sostituisca in luogo di y questo valore nell' equazione della curva, e ci darà $x = \frac{\sqrt[3]{2a^3}}{3}$, a cui corrisponde la massima ordinata y, che sarà $\frac{a}{3} \times 2^{\frac{2}{3}}$, cioè $\frac{\sqrt[3]{4a^3}}{3}$.

269. Ma senza paragonare la data equazione con un'altra, che contenga le due radici eguali, per soddisfare alla condizione del problema, basterà moltiplicarla, ter-

termine per termine con una ſerie aritmetica qualunque, imperciocchè ſe l'equazione â le due radici eguali, come deve nel caſo dei maſſimi, e minimi, infallibilmente una di eſſe radici ſarà anco nel prodotto di eſſa equazione moltiplicata per la ſerie aritmetica, quindi moltiplicando così l'equazioni s'include la condizione, ſotto cui deveſi ritrovare il valore dell'aſſiſſa, a cui corriſponde la ricercata maſſima, o minima ordinata. E per dimoſtrarlo: ſia generalmente l'equazione di due radici eguali $xx - 2hx + hh = 0$, che ſi moltiplichi per la ſerie aritmetica a, $a + b$, $a + 2b$, ſarà il prodotto

$$\begin{matrix} axx - 2ahx + ahh \\ \quad - 2bhx + 2bhh \end{matrix} = 0,$$ in queſto ſoſtituita la quantità h in luogo di x, tutti i termini ſi diſtruggono, o pure dividendolo per $x - h$, ſuccede la diviſione, adunque $x - h$ ſarà una radice di eſſo prodotto, ſiccome è di $xx - 2hx + hh$; lo ſteſſo ſuccede ſe la progreſſione aritmetica ſia decreſcente, cioè a, $a - b$, $a - 2b$ ec.

E perchè l'equazione delle due radici eguali è generale, ed è generale altresì la ſerie aritmetica a, $a + b$, $a + 2b$ ec., ſarà ſempre vero, che moltiplicata un'equazione di due radici eguali per una ſerie aritmetica qualunque, termine per termine, ſarà il prodotto diviſibile per una di eſſe radici. Per la ſteſſa ragione, ſe l'equazione avrà tre radici eguali, moltiplicata eſſa in una ſerie aritmetica, il prodotto averà due di eſſe radici e-

guali, e se questo prodotto si moltiplicherà similmente per una serie aritmetica, il nuovo prodotto ne avrà una, e così discorrendo d'equazioni superiori.

Ripiglio l'equazione $xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$ all'ellissi, la moltiplico per la serie 2, 1, 0

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0.$$
$$2, \quad 1, \quad 0.$$

Il prodotto è $2xx - 2ax = 0$, che ci dà $x = a$, come si è trovato di sopra. Moltiplico questa stessa equazione con un'altra serie aritmetica 3, 2, 1

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0.$$
$$3, \quad 2, \quad 1.$$

Il prodotto è $3xx - 4ax + \frac{2ayy}{p} = 0$, in cui sostituito in luogo della yy il valore $\overline{2ax - xx} \times \frac{p}{2a}$, dato dall'equazione della curva, si trova istessamente $x = a$.

Prendo la seconda equazione $x^3 * - axy + y^3 = 0$, che moltiplico con la serie 3, 2, 1, 0

$$x^3 * - axy + y^3 = 0.$$
$$3, 2, \quad 1, \quad 0.$$

Il prodotto è $3x^3 - axy = 0$, cioè $3xx = ay$, come sopra.

270. Con simil metodo si trovano le tangenti, e le perpendicolari alle curve in qualunque punto dato.

La questione si riduce a ritrovare il circolo, che tocchi la curva in quel punto, essendo in questo caso sì la tangente del circolo in quel punto, come la perpendicolare, cioè il raggio, comuni pure alla curva nel punto stesso.

Sia la curva *ACM* (*Fig.* 157.), di cui si voglia la tangente nel punto *L*, e sia il circolo *GMH*, che la tagli ne' due punti *M*, *C*; abbassate le due ordinate *CE*, *MP*, e per i punti *M*, *C*, condotta la retta *MCT*, taglierà essa la curva pure ne' punti *M*, *C*; ma quanto più si anderanno accostando i detti punti, minore sempre si farà la differenza delle ordinate *CE*, *MP*, e delle assisse *AE*, *AP* di modo, che quando un punto cada sopra dell'altro, per esempio in *L*, saranno eguali i valori di queste ordinate, ed assisse, ed allora il circolo toccherà la curva nel punto *L*, (a riserva però, che il circolo sia l'osculatore, perchè in quel caso taglia la curva, e la tocca nello stesso punto, come si vedrà nel calcolo differenziale) e la retta *MT* sarà la tangente della curva, e del circolo nel punto *L*, siccome *FL* normale.

Si chiami adunque nella curva *ALM* (*Fig.* 158.) la $AQ = x$, $QL = y$, e condotta dal punto dato *L* la

retta

retta LN, che si supponga normale alla curva; ed in conseguenza alla tangente in L, sia $LN = s$, $AN = u$, sarà $QN = u - x$, ed il triangolo rettangolo QLN darà l'equazione canonica $ss = uu - 2ux + xx + yy$, da cui ricavato il valore della y, o della x, si sostituisca nell' equazione della curva data, per mezzo della quale si deve avere il valore della s, o della u, considerando come data la x, o la y, poichè si assume per dato il punto L.

Sia per esempio la curva ALM la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$; fatta la sostituzione in luogo della yy, del suo valore dato dall'equazione canonica, sarà l'equazione $ax = ss - uu + 2ux - xx$, ed ordinata per la lettera x sarà $xx \begin{array}{l} - 2ux + uu \\ + ax - ss \end{array} = 0$. Questa adunque deve avere due radici eguali quando la retta $LN = s$ sia normale alla parabola nel punto L, cioè nel caso della tangente, e però ritrovato nell'ipotesi delle due radici eguali il valore della incognita $AN = u$, si averà il punto N, da cui condotta la NL al dato punto L, e la perpendicolare LT ad NL, sarà essa la tangente cercata.

Ora per determinare la incognita u nell' ipotesi delle due radici eguali; paragono l'equazione, termine per termine, con una di due radici eguali, cioè

con

con $xx - 2ex + ee = 0$ nel seguente modo

$$\begin{array}{l} xx - 2ux + uu \\ \quad + ax - ss \end{array} = 0$$

$$xx - 2ex + ee = 0 ;$$

e dal paragone de' secondi termini si avrà $-2u + a = -2e$, cioè $u = \frac{a + 2e}{2}$, ma $e = x$, per l'equazione $xx - 2ex + ee = 0$; dunque $u = \frac{a}{2} + x$, e perciò dal punto Q presa $QN = \frac{1}{2}a$, sarà NL la normale, ed LT, ad essa perpendicolare, sarà la tangente della curva nel punto L.

In vece di paragonare la suddetta equazione con una di due radici eguali, la moltiplico colla serie aritmetica 3, 2, 1

$$\begin{array}{l} xx - 2ux + uu \\ \quad + ax - ss \end{array} = 0$$

$$3, \quad 2, \quad 1 .$$

Il prodotto è $\begin{array}{l} 3xx - 4ux + uu \\ \quad + 2ax - ss \end{array} = 0$, ma $ss = uu - 2ux + xx + yy$, e per la parabola è $yy = ax$, onde $ss = uu - 2ux + xx + ax$; sostituito adunque questo valore in luogo di ss, sarà $2xx - 2ux + ax = 0$, cioè $u = \frac{a}{2} + x$, come prima.

Più brevemente si avrebbe avuto l'intento molti-

tipli-

tiplicando l'equazione per la ſerie aritmetica 2, 1, 0.

271. Sia la ſeconda parabola cubica $x^3 = ayy$; fatta la ſoſtituzione del valore di yy cavato dall'equazione canonica, naſce l'equazione $\begin{matrix} x^3 + axx - 2aux + auu \\ - ass \end{matrix} = 0$, la quale per eſſere del terzo grado ſi paragoni col prodotto dell'equazione $xx - 2ex + ee = 0$ in $x - f = 0$

$$\begin{matrix} x^3 + axx - 2aux + auu \\ - ass \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} x^3 - 2exx + eex - eef \\ - fxx + 2efx \end{matrix} = 0;$$

dal paragone de' ſecondi termini ſi â $-2e - f = a$, cioè $f = -a - 2e$; dal paragone de' terzi ſi â $ee + 2ef = -2au$, e poſto il valore già ritrovato di f, $u = \frac{3ee + 2ae}{2a}$, cioè $u = \frac{3xx + 2ax}{2a}$, perchè $e = x$.

Moltiplico ora l'equazione con la ſerie aritmetica 3, 2, 1, 0

$$\begin{matrix} x^3 + axx - 2aux + auu \\ - ass \end{matrix} = 0$$

$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0;$$

il prodotto è $3x^3 + 2axx - 2aux = 0$, e però iſteſſamente $u = \frac{3xx + 2ax}{2a}$.

272. Circa l'elezione delle ſerie aritmetiche ſi può oſſervare, che per lo più ſarà la più comoda quella, che

che formano gl' esponenti cominciando dal massimo della lettera, secondo cui è ordinata l'equazione.

273. Un'altra maniera di sciogliere questo Problema poco diversa, ma forse più semplice, e che avrà uso ne' flessi contrarj, e ne' regressi può essere questa.

Sia la curva *AEMD* (*Fig.* 159.) tagliata dalla retta *HED* ne' punti *E*, *D*; e sieno le assisse *AB*, $AC = x$, le ordinate *BE*, $CD = y$. E' chiaro, che passando la retta *HD* ad essere la tangente *TM* della curva nel punto *M*, i due punti *E*, *D* caderanno in *M*, e per conseguenza si faranno eguali tra loro le *AB*, *AC*, siccome tra loro le *BE*, *CD*. Si alzi *AN* parallela alle ordinate, e sia $AT = u$, $AN = s$, per la similitudine de' triangoli *TAN*, *TKM*, sarà $u, s :: u + x, y$, cioè $y = \frac{us + sx}{u}$, ed $x = \frac{uy - us}{s}$; nell'equazione della curva data si sostituiscano questi valori in luogo della y, o della x, e ne nascerà un'altra, la quale dovrà avere due radici eguali, quando *AT*, *AN* sieno tali, che la retta *TNM* tocchi la curva, adunque facendo il paragone con un'altra di due radici eguali, o moltiplicandola per una serie aritmetica, si averà il valore della ricercata *AT*, o *AN*, e data l'una, è pure data l'altra. Ommetto gl' esempj, perchè la maniera di operare è la stessa della usata di sopra.

274. Siccome il metodo, e la natura de' massimi, e minimi, e delle tangenti include necessariamente nelle equazioni due radici eguali, così tre radici eguali si danno ne' Flessi contrarj, e ne' Regressi. Per flesso contrario s'intende quel punto, in cui la curva da concava si fa convessa, o all'opposto; e per regresso quel punto, in cui essa torna all'indietro, o concava, o convessa.

Sia la curva *ACFM*, (*Fig.* 160.) che abbia un flesso contrario nel punto *F*, e si conduca la retta *GCM*, che la tocchi nel punto *C*, e la tagli nel punto *M*, abbassate da essi le ordinate *CH*, *MP*, facilmente si vede, che quanto più il punto *C* della tangente s'accosterà al punto del flesso contrario *F*, tanto più altresì si accosterà al punto *F* il punto *M* di modo, che quando *C* cada in *F*, vi caderà pure *M*; ed in conseguenza si faranno eguali *AH*, *AP*, siccome *CH*, *MP*, e la retta *GCM* toccherà, e taglierà la curva nel punto *F*; ma la natura della tangente già porta due radici eguali, ed ora si aggiunge la terza, adunque di natura del flesso contrario è, che a lui corrispondano tre radici eguali.

Dal punto *A* alzata *AN* parallela all'ordinate, e fatta $AN = s$, $AT = u$, e condotta *TNF*; sarà,

per

per i triangoli simili *TAN*, *TVF*, $y = \frac{us + sx}{u}$, ed $x = \frac{uy - us}{s}$, chiamate $AV = x$, $VF = y$. Sostituiti per tanto questi valori in luogo di x, o di y nell' equazione della curva data, l'equazione, che nasce, dovrà avere tre radici eguali quando *AT*, o *AN* sieno tali, che la *TNF* condotta dal punto *T* per lo punto *N* incontri la curva nel ricercato punto del flesso contrario *F*.

Similmente si discorra della curva *ACM*, (*Fig.* 161.) che abbia un regresso nel punto *C*; poichè la tangente *TC* della curva nel punto *C* assieme la taglia nello stesso punto, e quindi ne nascono nella stessa maniera le tre radici eguali.

Sia la curva *AFS* (*Fig.* 162.) dell' equazione $ayy - xyy - aax = 0$, in cui sono le $AQ = x$, e le $QF = y$, e si cerchi il punto del flesso contrario *F*. Posta $AT = u$, $AV = s$, e parallela alle ordinate *QF*, e sostituito in luogo di x il valore $\frac{uy - us}{s}$ nell' equazione della curva, sarà essa

$$y^3 \begin{array}{l} - \frac{asyy}{u} \\ - syy \end{array} + aay - aas = 0,$$

la

la quale dovrà avere tre radici eguali, e però si avrà da paragonare con una equazione di tre radici eguali, o da moltiplicarsi per due serie aritmetiche.

Si moltiplichi adunque per la serie 1, 0, —1, —2, ed il prodotto $y^3 * - aay + 2aas = 0$, di nuovo moltiplicato per la serie 3, 2, 1, 0, ci darà $3y^3 - aay = 0$, e però $yy = \frac{aa}{3}$, il qual valore sostituito nell' equazione data della curva ci fornisce finalmente $x = \frac{1}{4}a$.

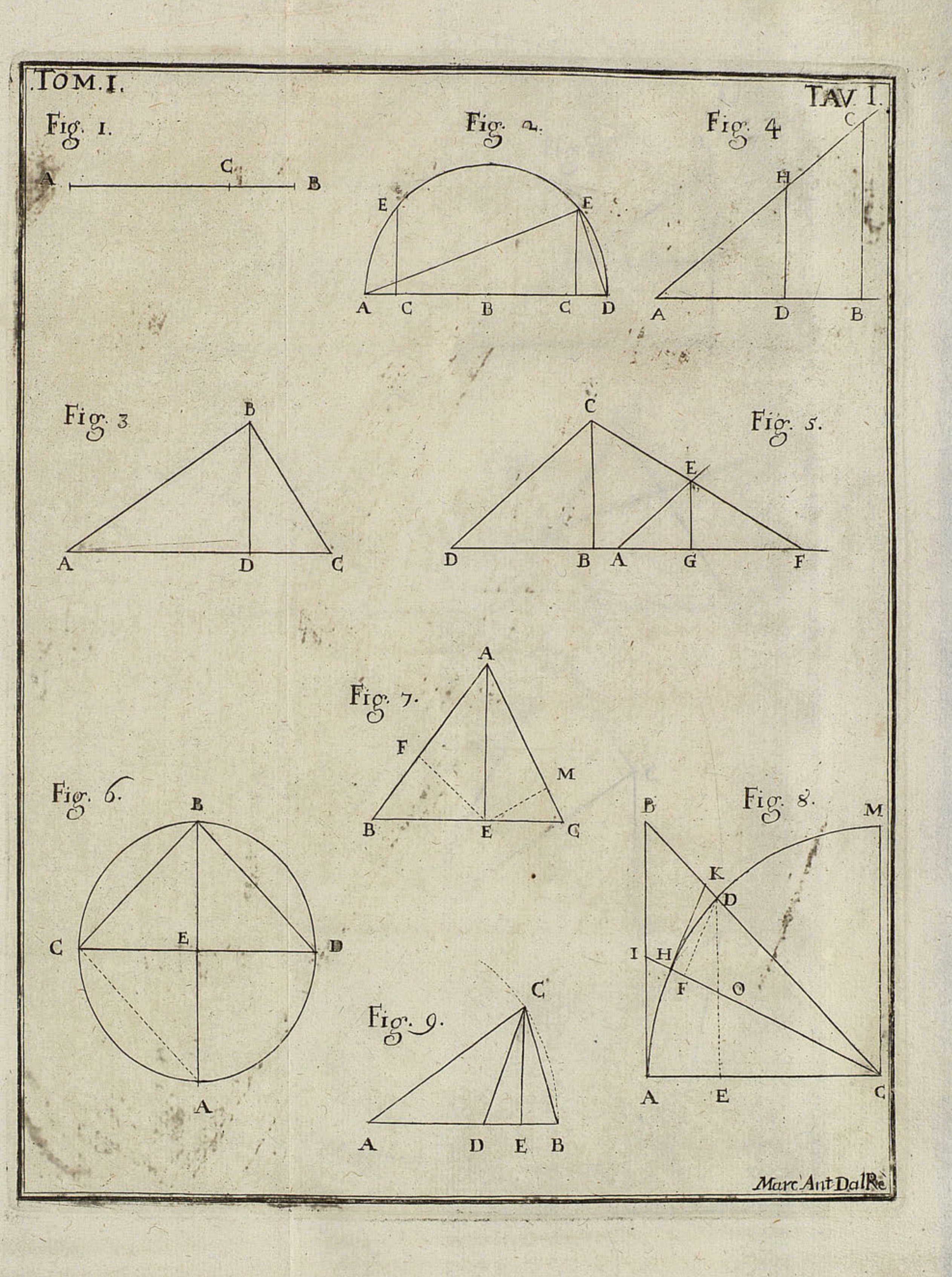
275. La maniera è la stessa per ritrovare i regressi delle curve, ed il metodo dà tanto questi, come quelli; quindi per distinguerli non vi è altro modo, che il ricercare per mezzo della costruzione l' andamento della curva.

L'istessa ambiguità nasce nelle questioni de' massimi, e minimi, la quale solo con l'idea della curva si può togliere. Con la medesima condizione delle tre radici eguali si potrebbero ritrovare i Raggi Osculatori, ma giacchè di tali cose si tratterà nel seguente libro, porrò fine a questo per non recare troppo di noja.

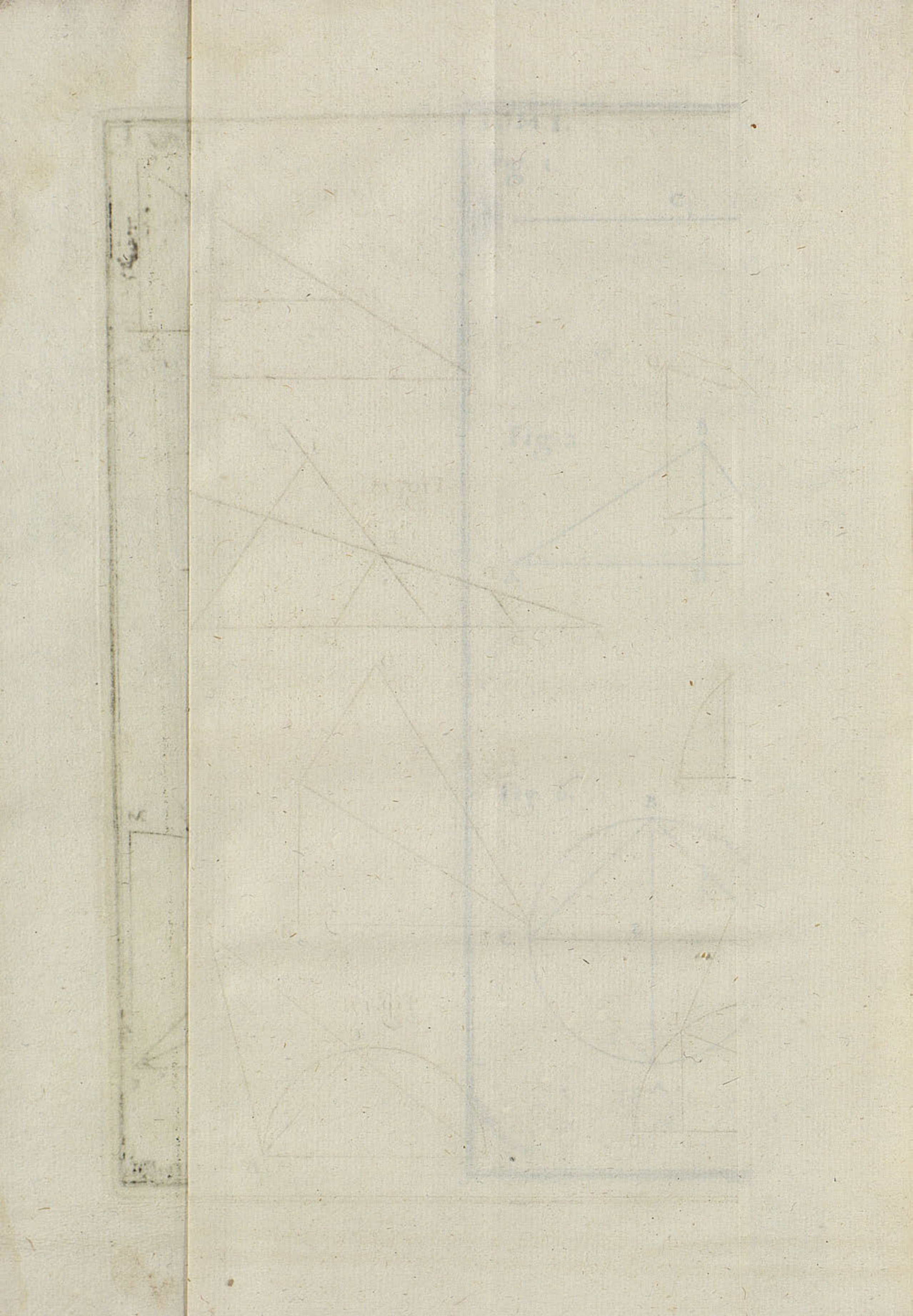
FINE DEL PRIMO LIBRO.

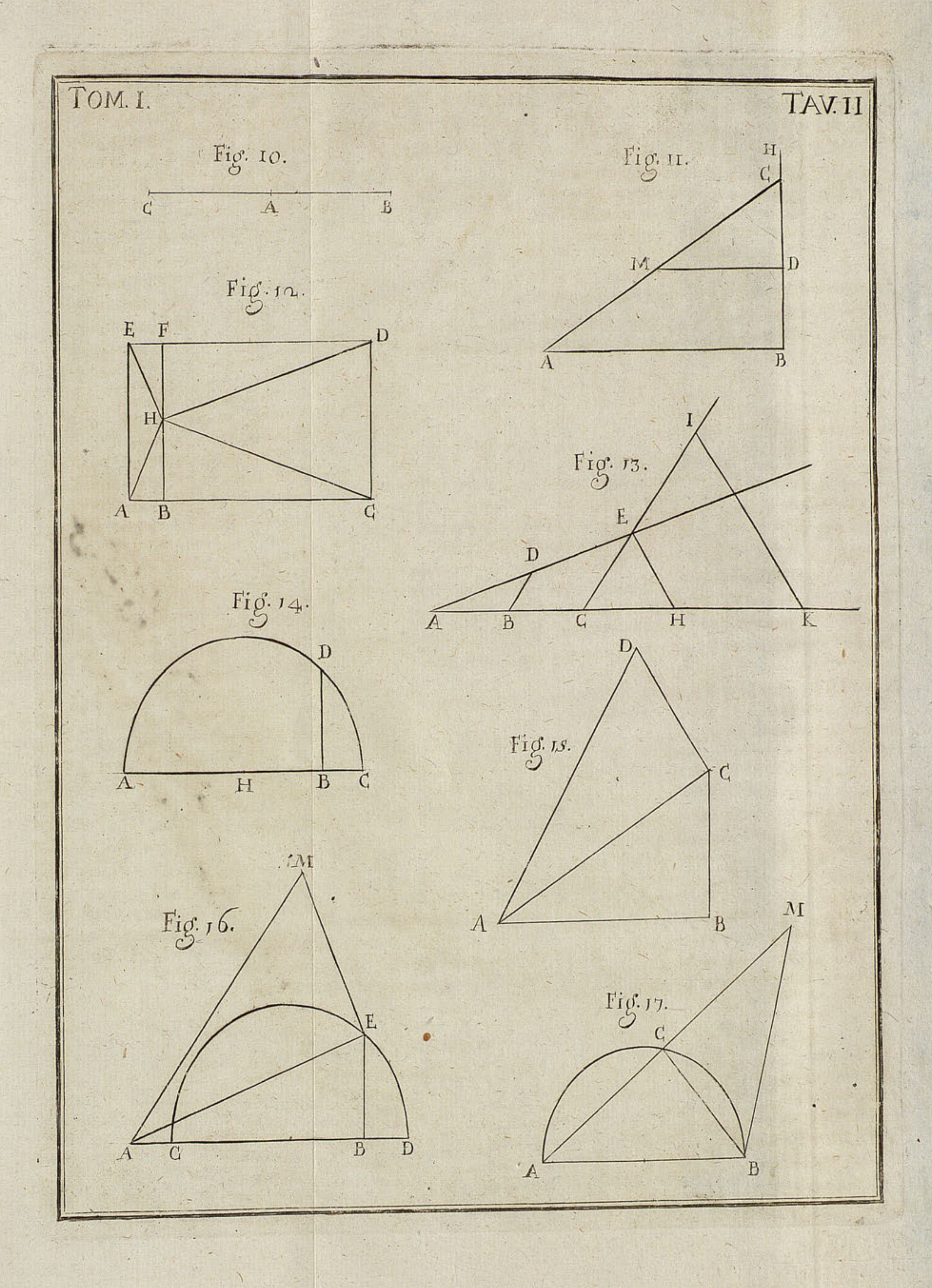
TOMO PRIMO.

	ERRORI	CORREZIONI
Pag. 55 lin. 7	$\sqrt{aa+3ax}-\sqrt{ax}$	$\sqrt{aa+4ax}-\sqrt{ax}$
Pag. 94 lin. 19	paragonali	paragonarli
Pag. 146 lin. 9	$-\sqrt{xx-\frac{aa}{xx}}$	$-\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$
Pag. 267 lin. 5	$+\int uz$	$+\int ux$
Pag. 382 lin. 11	num. 139.	num. 239.
Pag. 426 lin. 19	tocceherà	toccherà

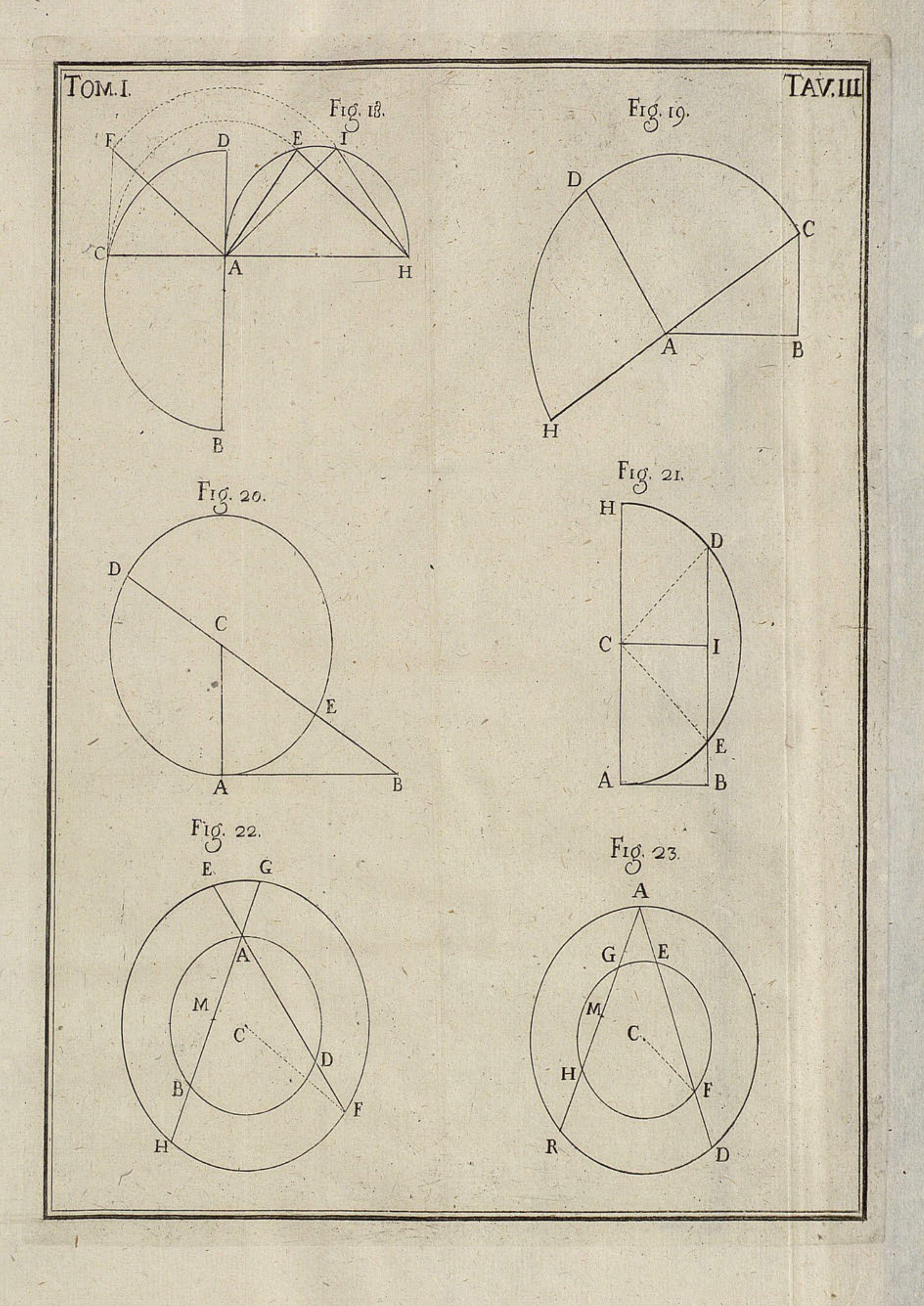


TOM. I.
TAV. I.
Fig. 1.
A
C
B
Fig. 2.
E
E
A
C
B
C
D
Fig. 4
C
H
A
D
B
Fig. 3
B
A
D
C
C
Fig. 5.
E
D
B
A
G
F
A
Fig. 7.
F
M
B
E
C
Fig. 6.
B
C
E
D
A
Fig. 8.
B
M
K
D
I
H
F
O
A
E
C
C
Fig. 9.
A
D
E
B
Marc Ant Dal Rè





TOM. I.
TAV. II
Fig. 10.
C
A
B
Fig. 11.
H
C
M
D
A
B
Fig. 12.
E
F
D
H
A
B
C
Fig. 13.
I
E
D
A
B
C
H
K
Fig. 14.
D
A
H
B
C
Fig. 15.
D
C
A
B
Fig. 16.
M
E
A
C
B
D
Fig. 17.
M
C
A
B


Fig. 18.
F
D
E
I
C
A
H
B
Fig. 19.
D
C
A
B
H
Fig. 20.
D
C
E
A
B
Fig. 21.
H
D
C
I
E
A
B
Fig. 22.
E
G
A
M
C
D
B
F
H
Fig. 23.
A
G
E
M
C
H
F
R
D

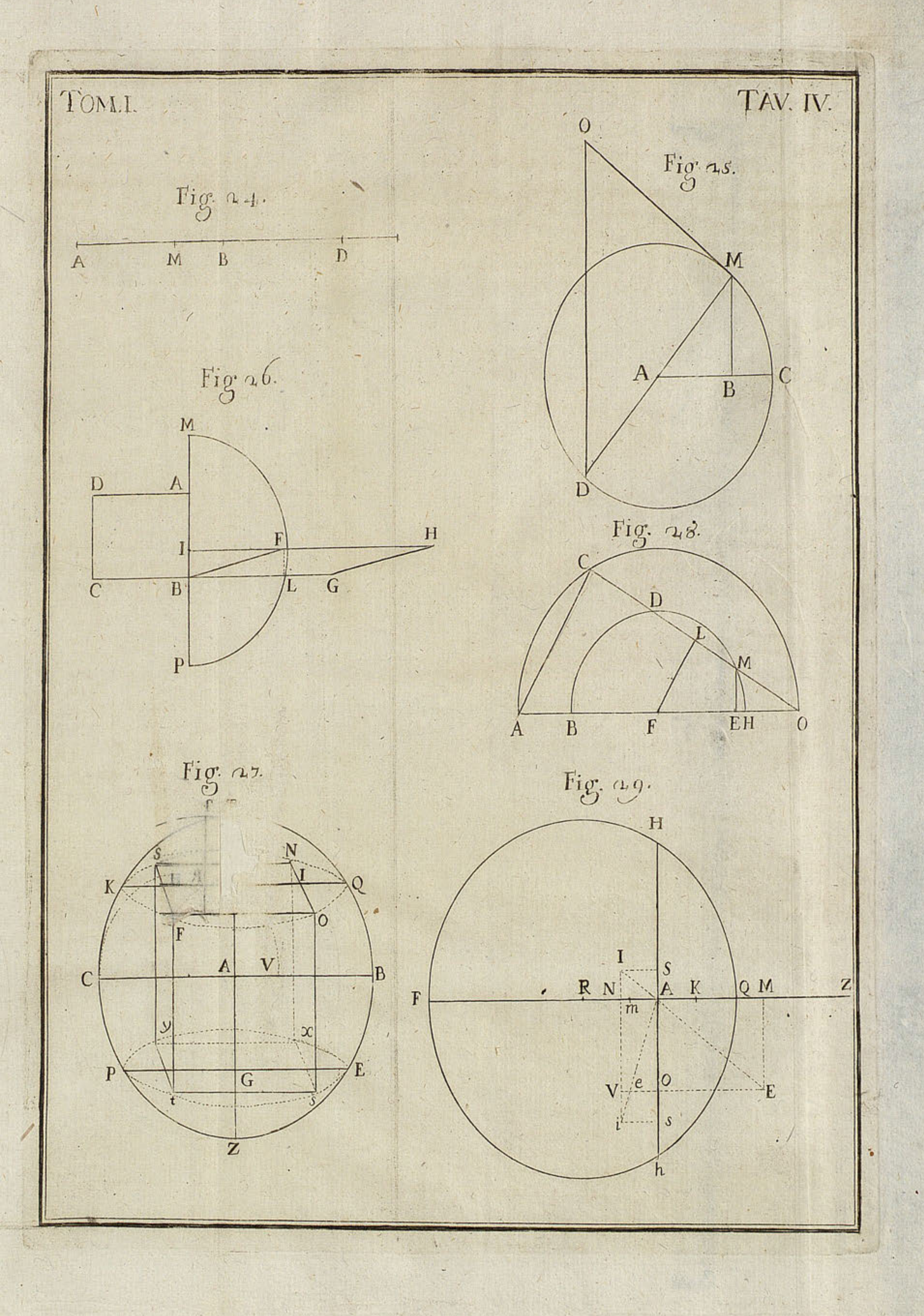
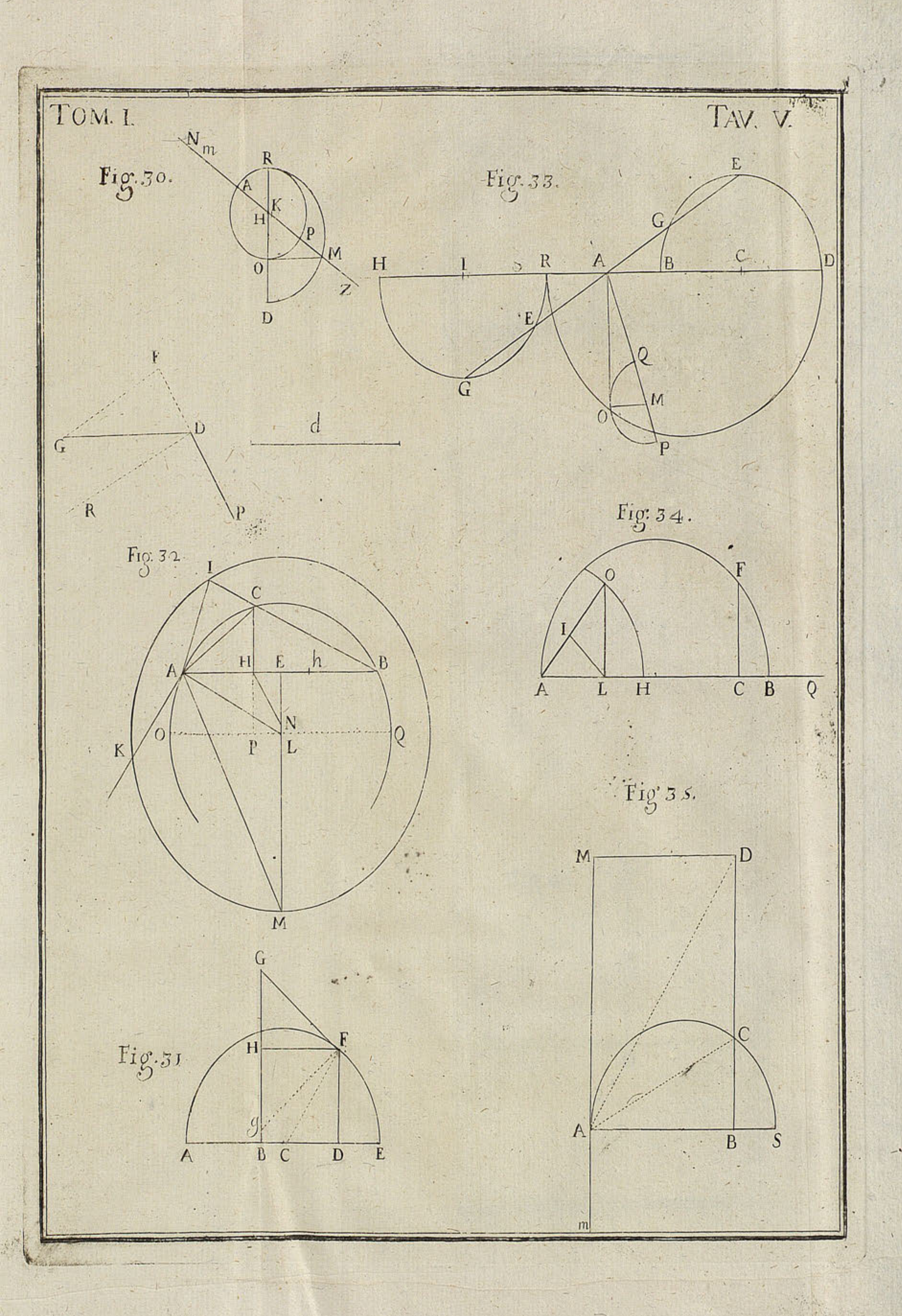
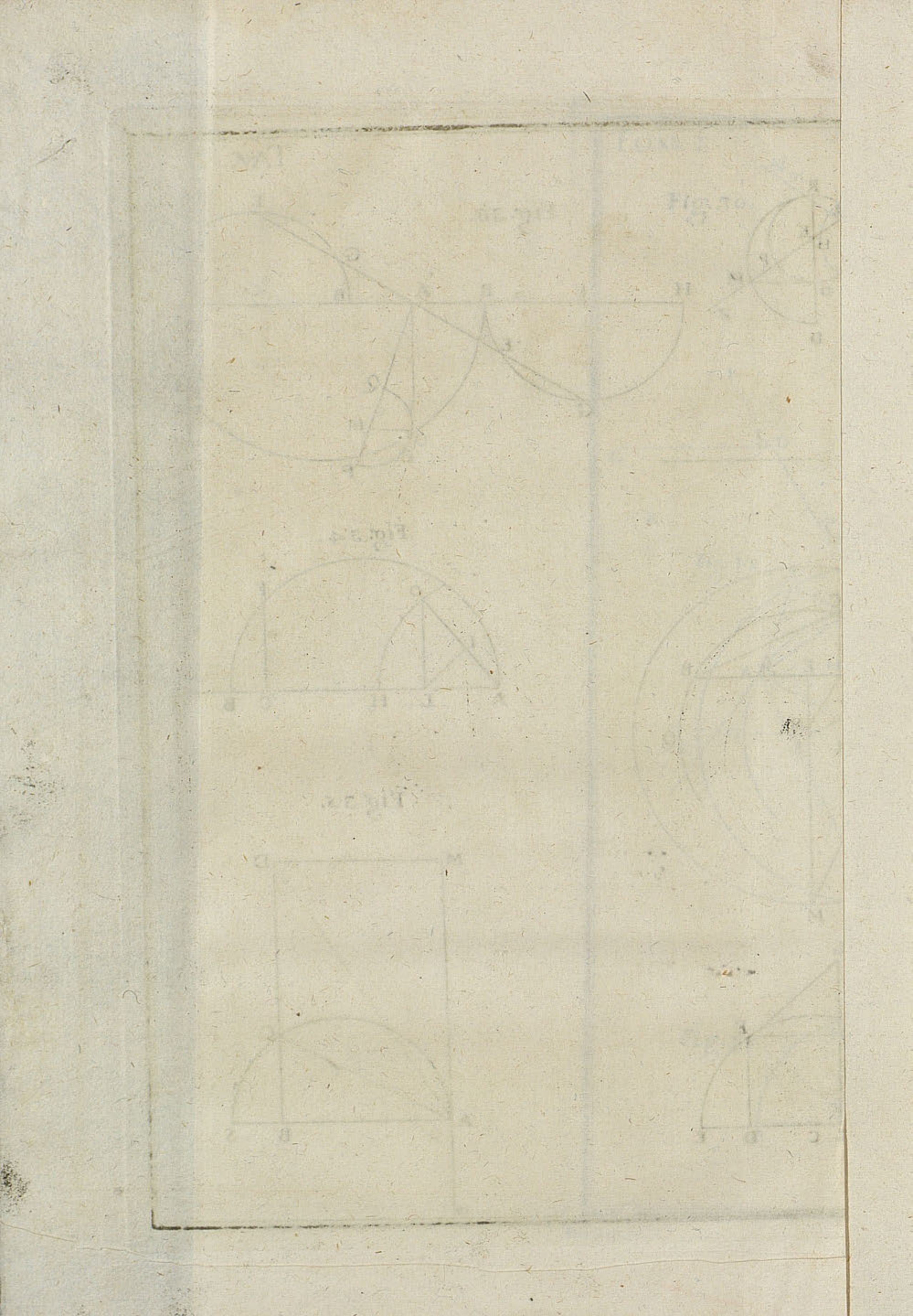
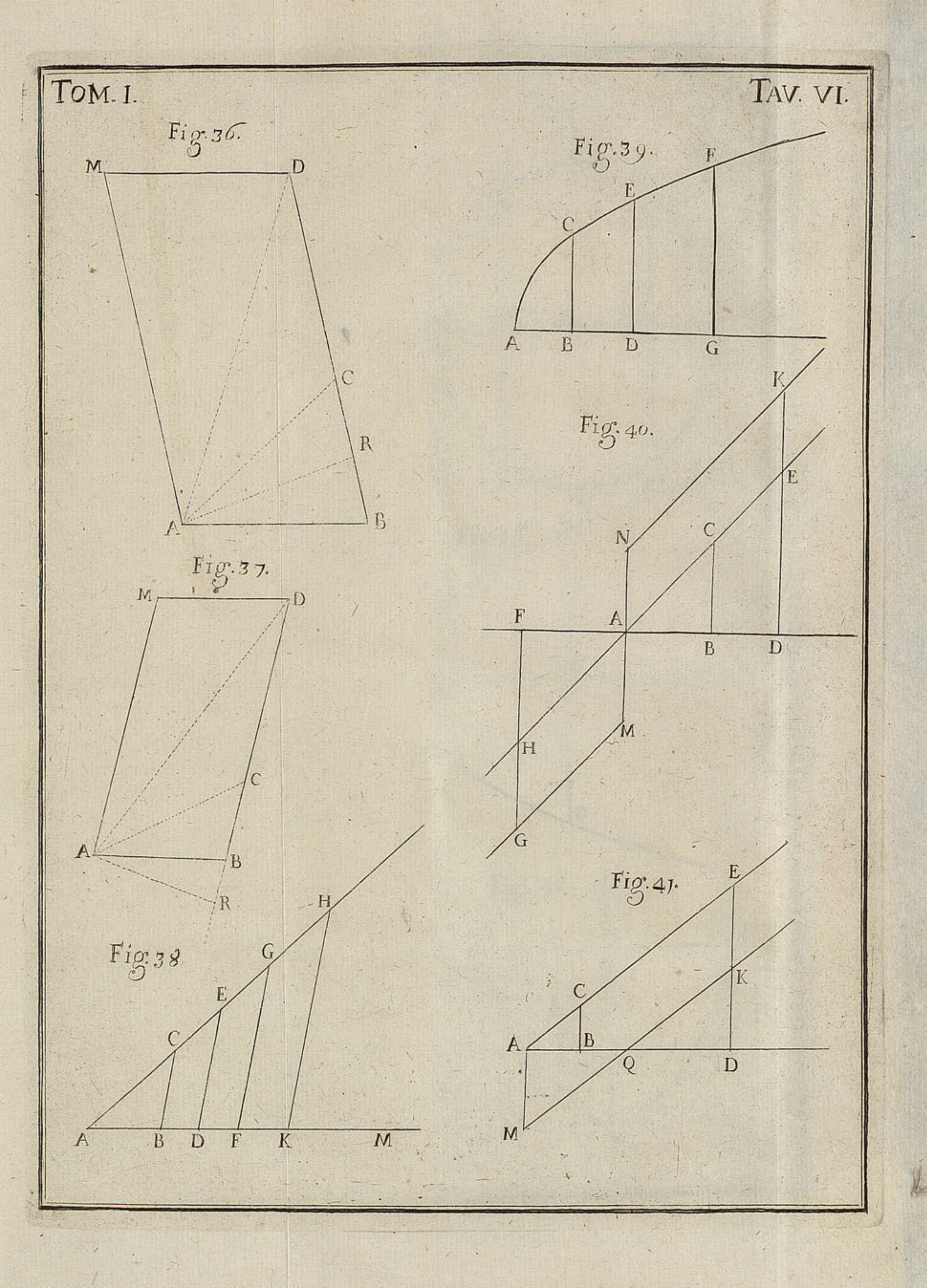


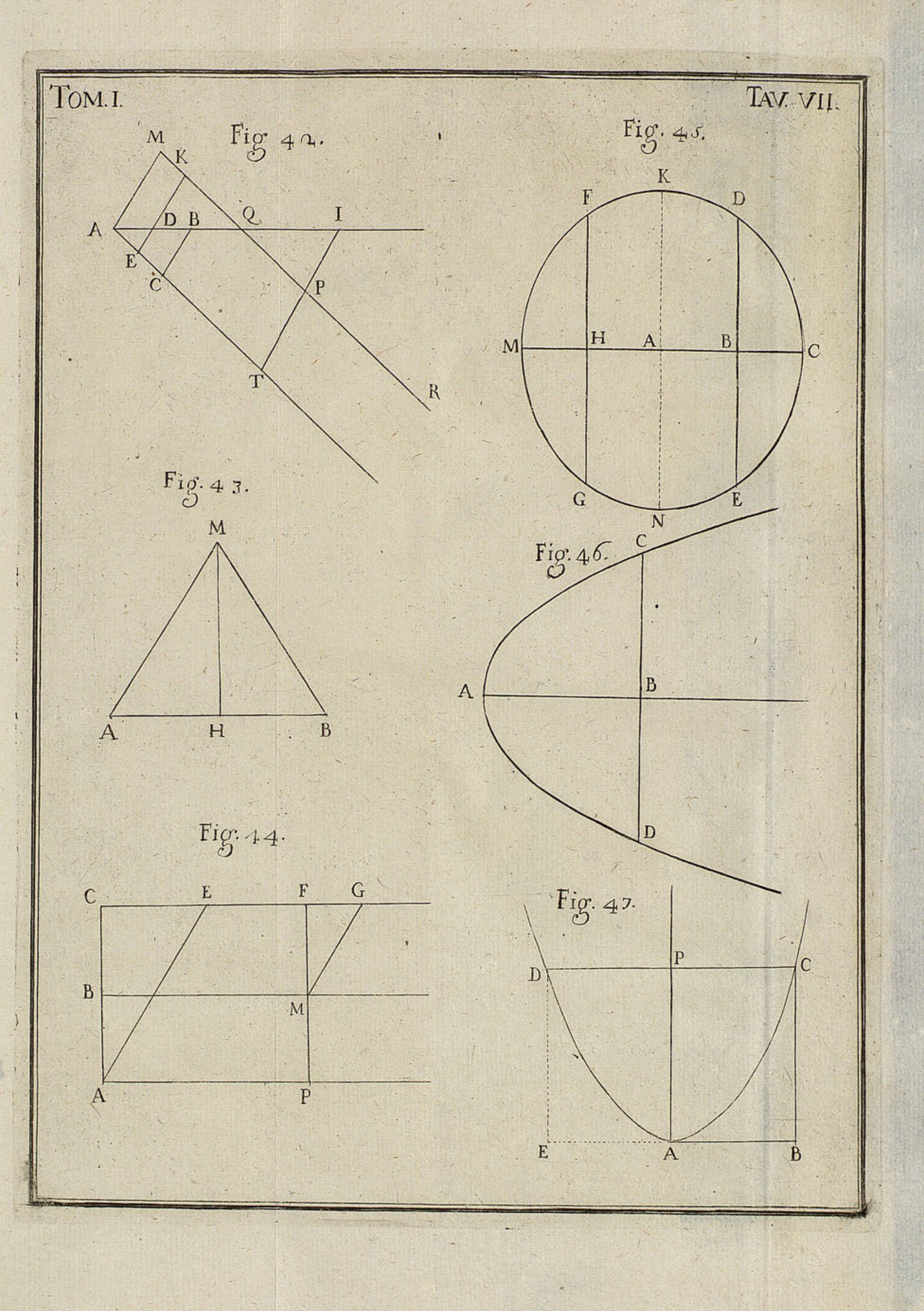
Fig. 24.
A M B D
Fig. 25.
O M A B C D
Fig. 26.
M D A I F H C B L G P
Fig. 28.
C D L M A B F E H O
Fig. 27.
S N K I Q O F C A V B y x P G E t s Z
Fig. 29.
H I S F R N A K Q M Z m V e O E i s h


TOM. I.
TAV. V.
Fig. 30.
Fig. 33.
Fig. 32.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 31.
d

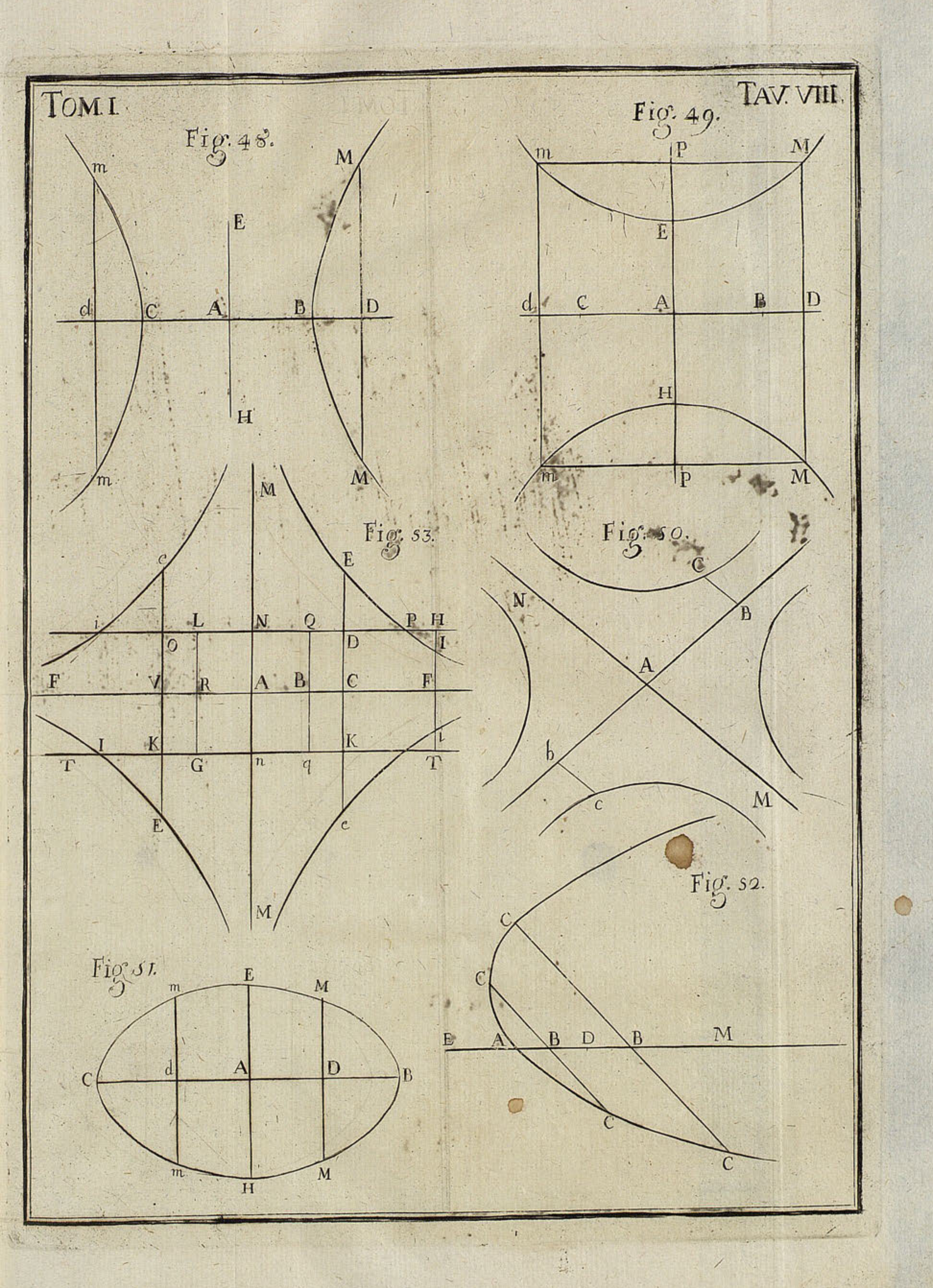


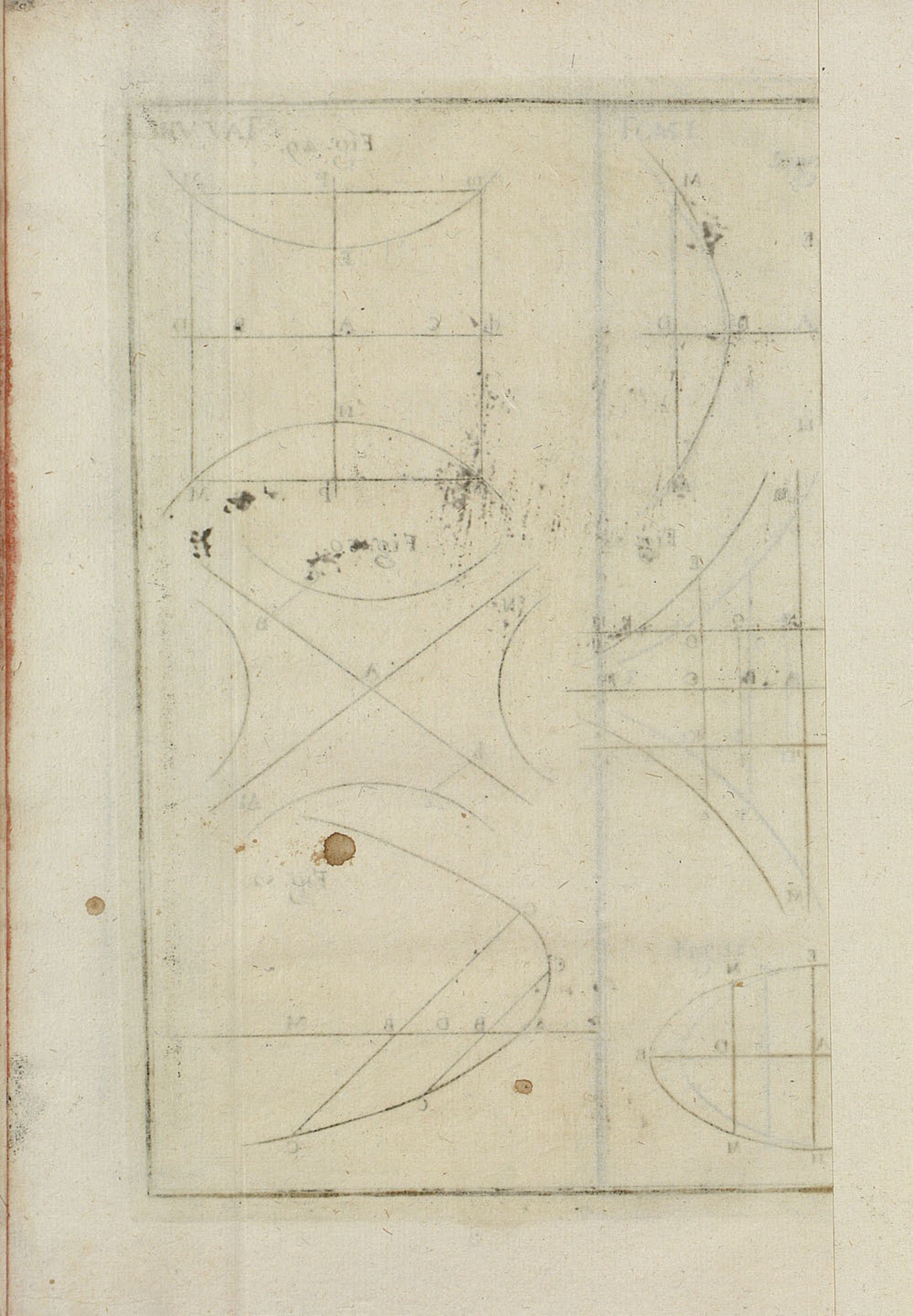


TOM. I.
TAV. VI.
Fig. 36.
M
D
C
R
A
B
Fig. 37.
M
D
C
A
B
R
Fig. 38
A
B
C
D
E
F
G
H
K
M
Fig. 39.
A
B
C
D
E
F
G
Fig. 40.
K
E
N
C
F
A
B
D
H
M
G
Fig. 41.
E
C
K
A
B
Q
D
M



Tom. I.
Tav. VII.
Fig. 42.
M
K
A
D
B
Q
I
E
C
P
T
R
Fig. 43.
M
A
H
B
Fig. 44.
C
E
F
G
B
M
A
P
Fig. 45.
K
F
D
M
H
A
B
C
G
E
N
Fig. 46.
C
A
B
D
Fig. 47.
P
D
C
E
A
B


TOM. I.
TAV. VIII.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.



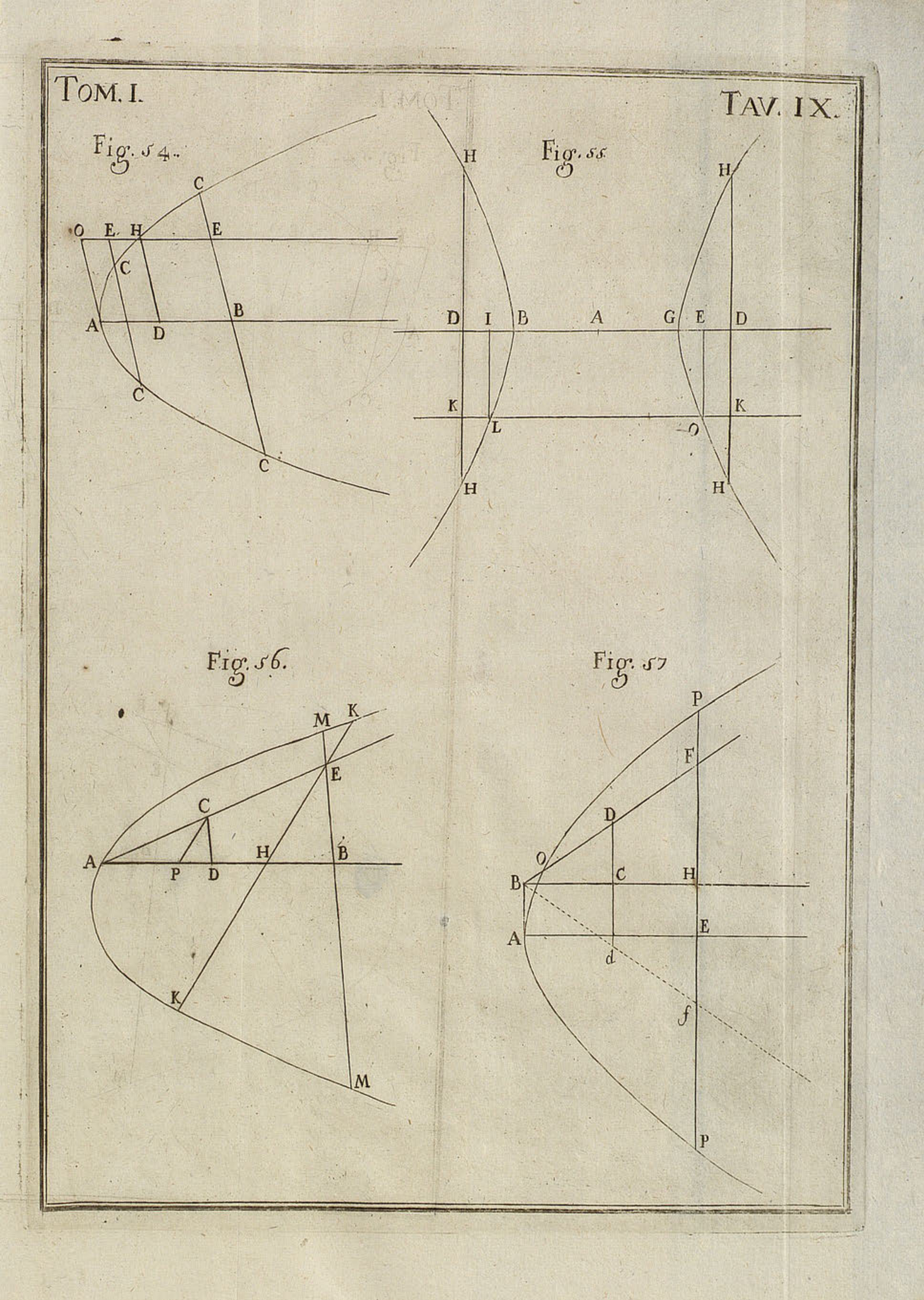
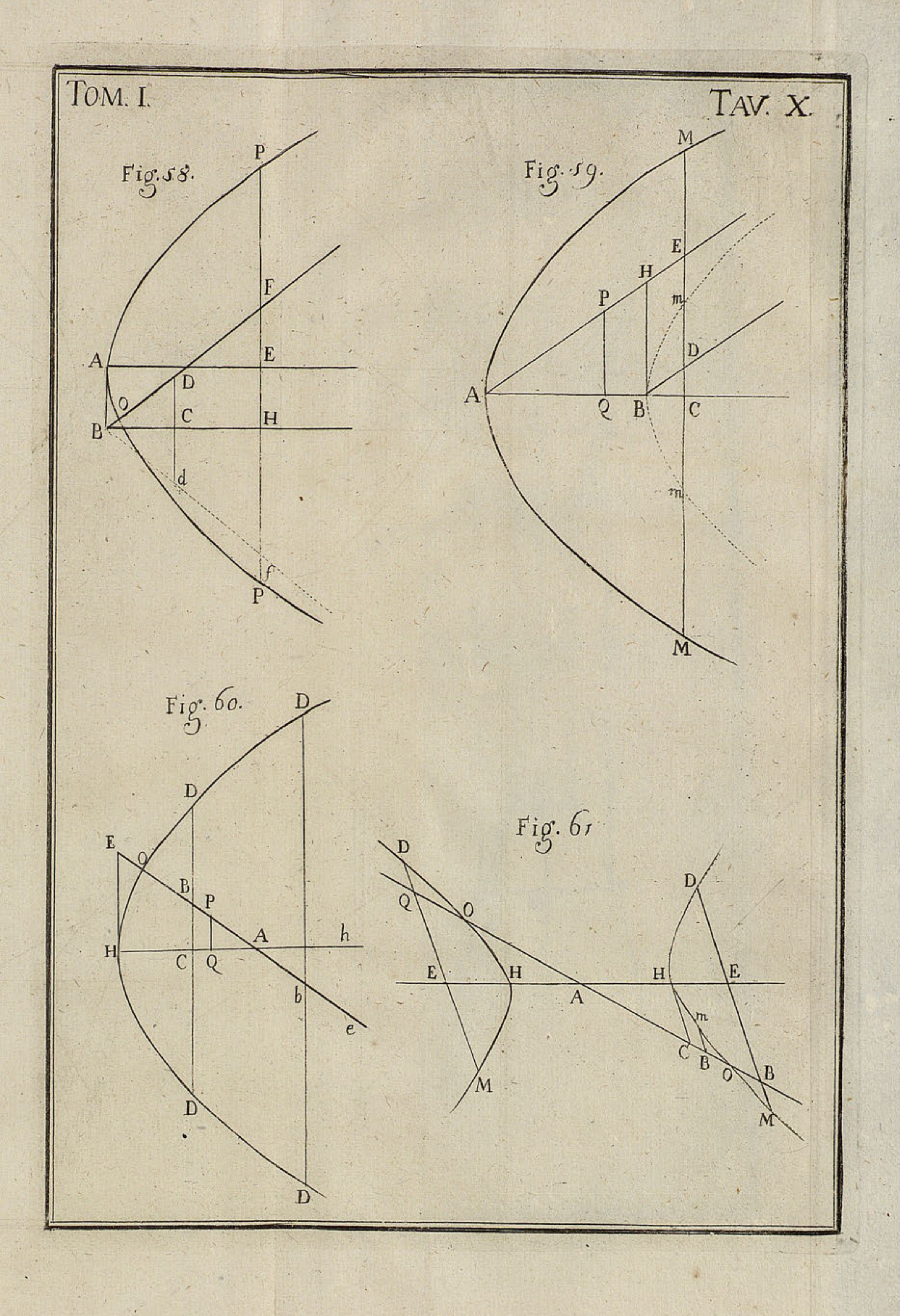
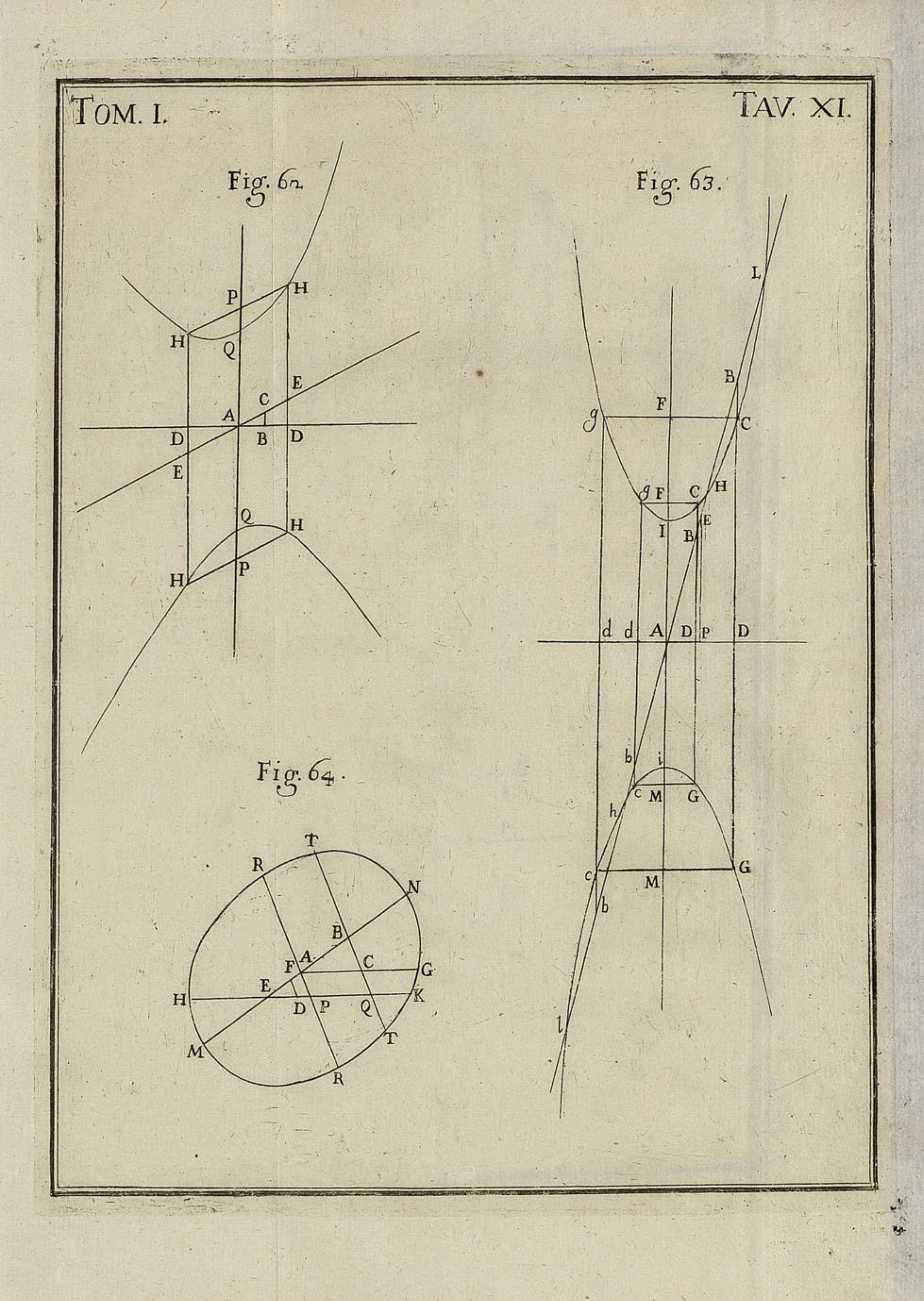
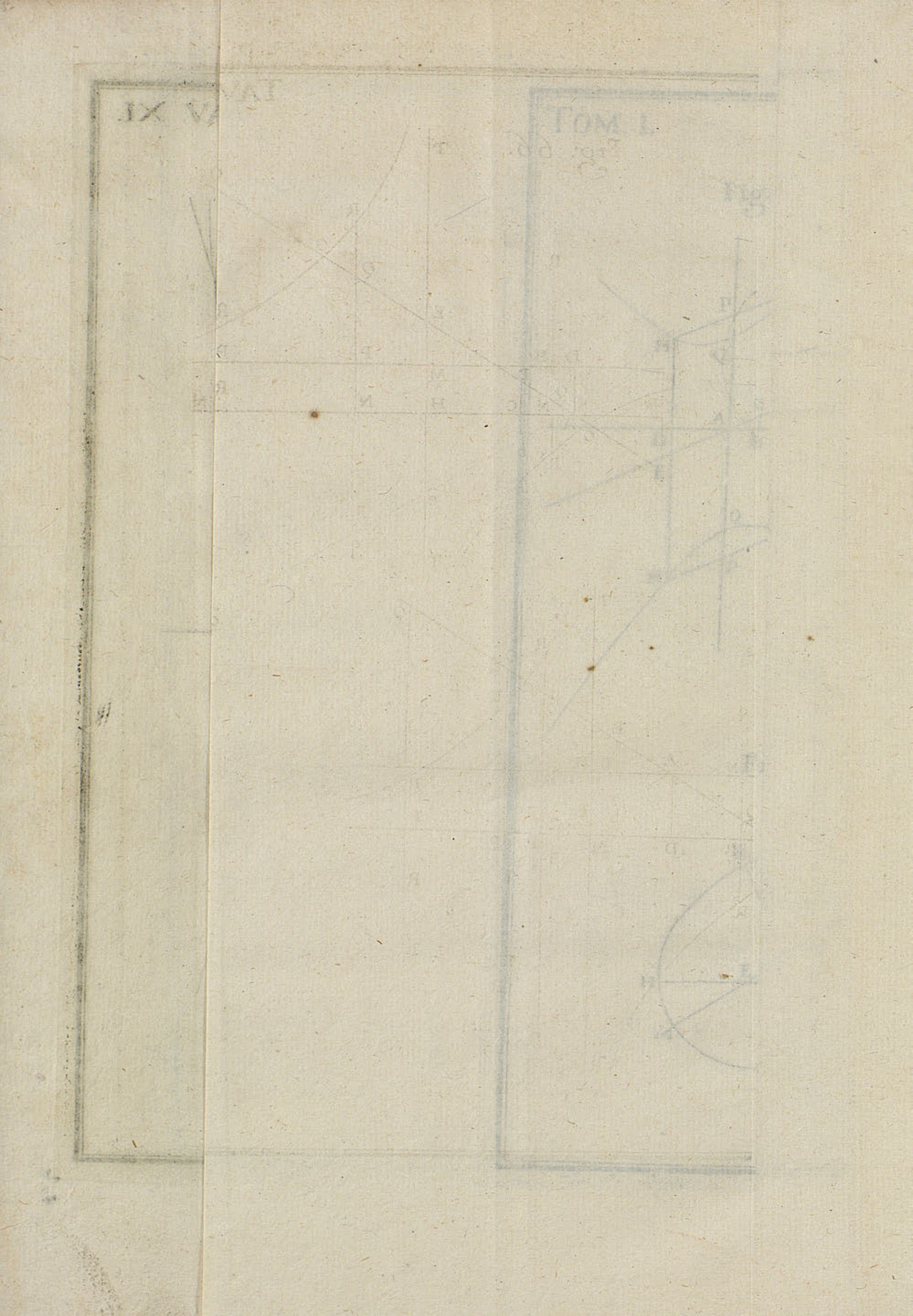


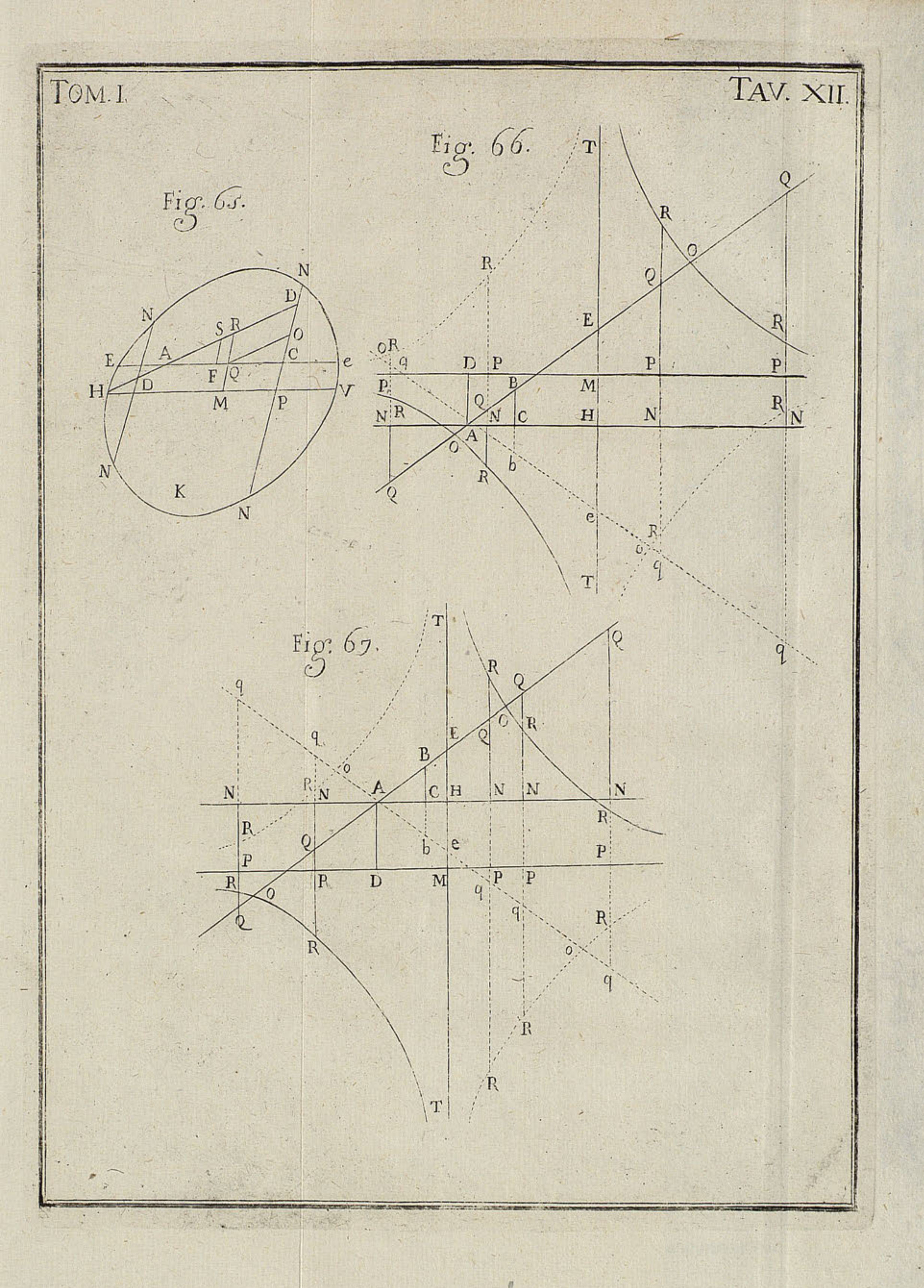
Fig. 54.
O E H E C C A D B C C
Fig. 55.
H D I B A G E D H K L O K H H
Fig. 56.
M K E C A P D H B K M
Fig. 57
P F D O B C H A E d f P

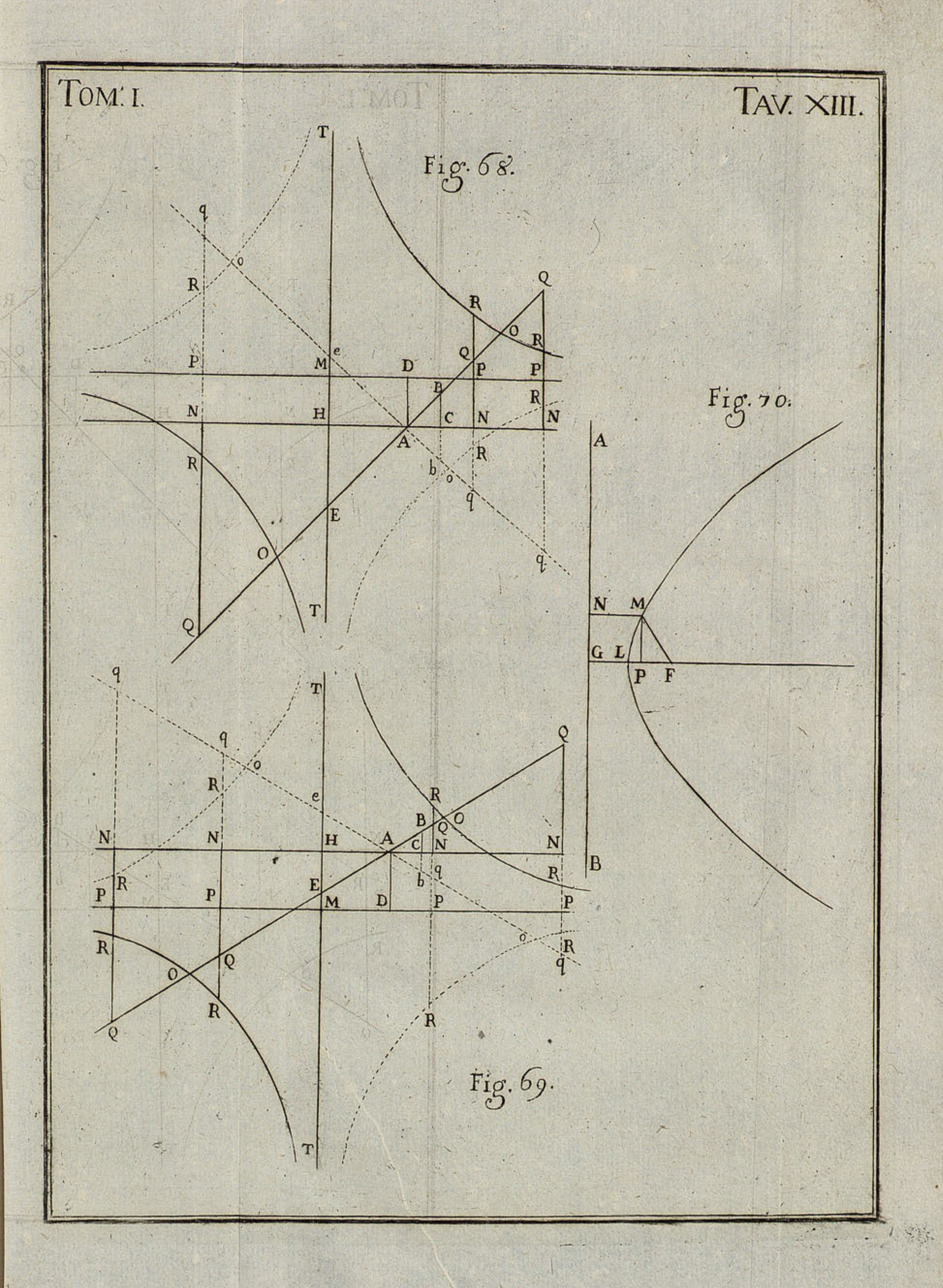


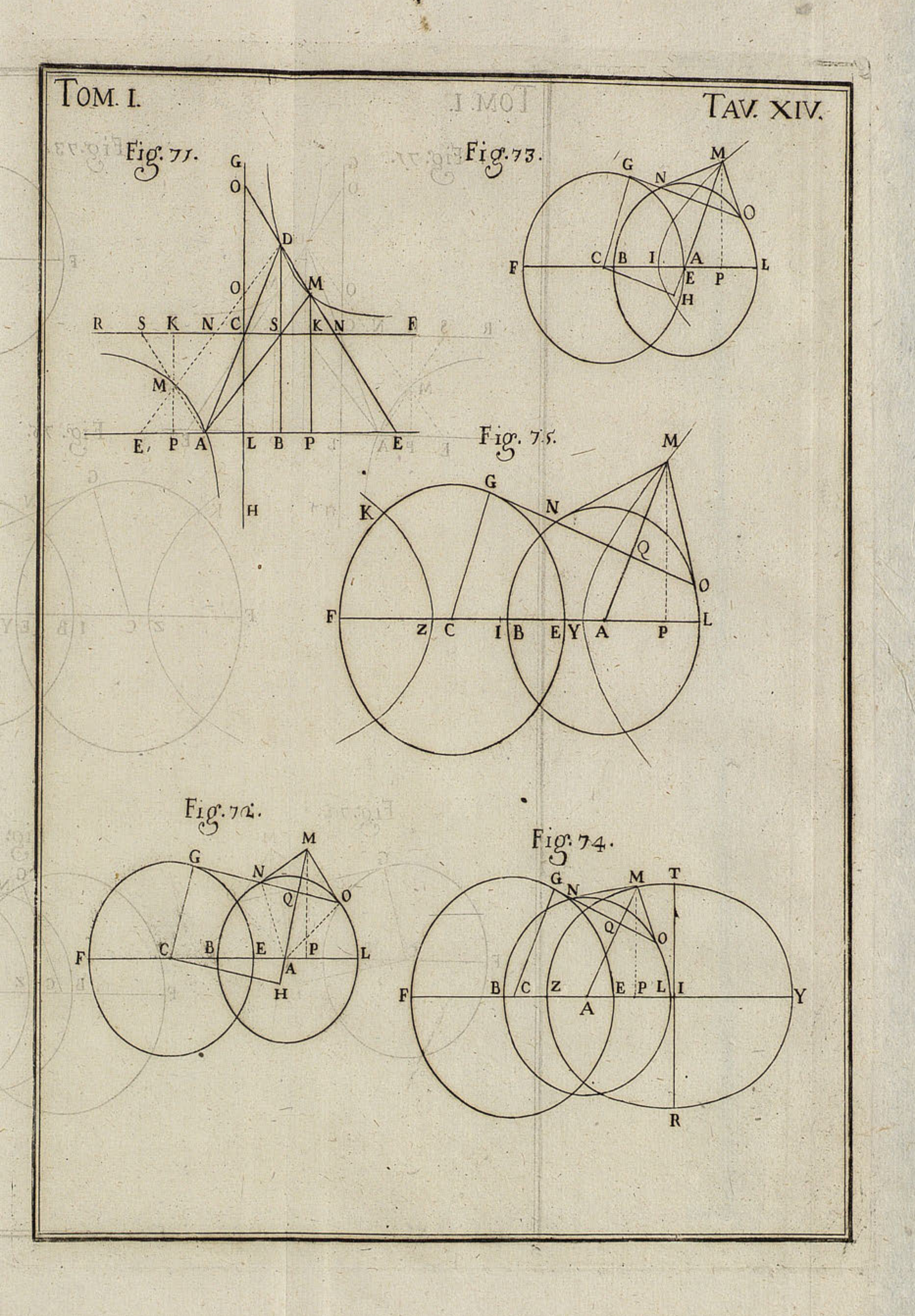
TOM. I.
TAV. X.
Fig. 58.
P
F
A
E
D
O
C
H
B
d
f
P
Fig. 59.
M
E
H
P
m
D
A
Q
B
C
m
M
Fig. 60.
D
D
E
O
B
P
A
h
H
C
Q
b
e
D
D
Fig. 61
D
Q
O
E
H
A
M
D
H
E
m
C
B
O
B
M

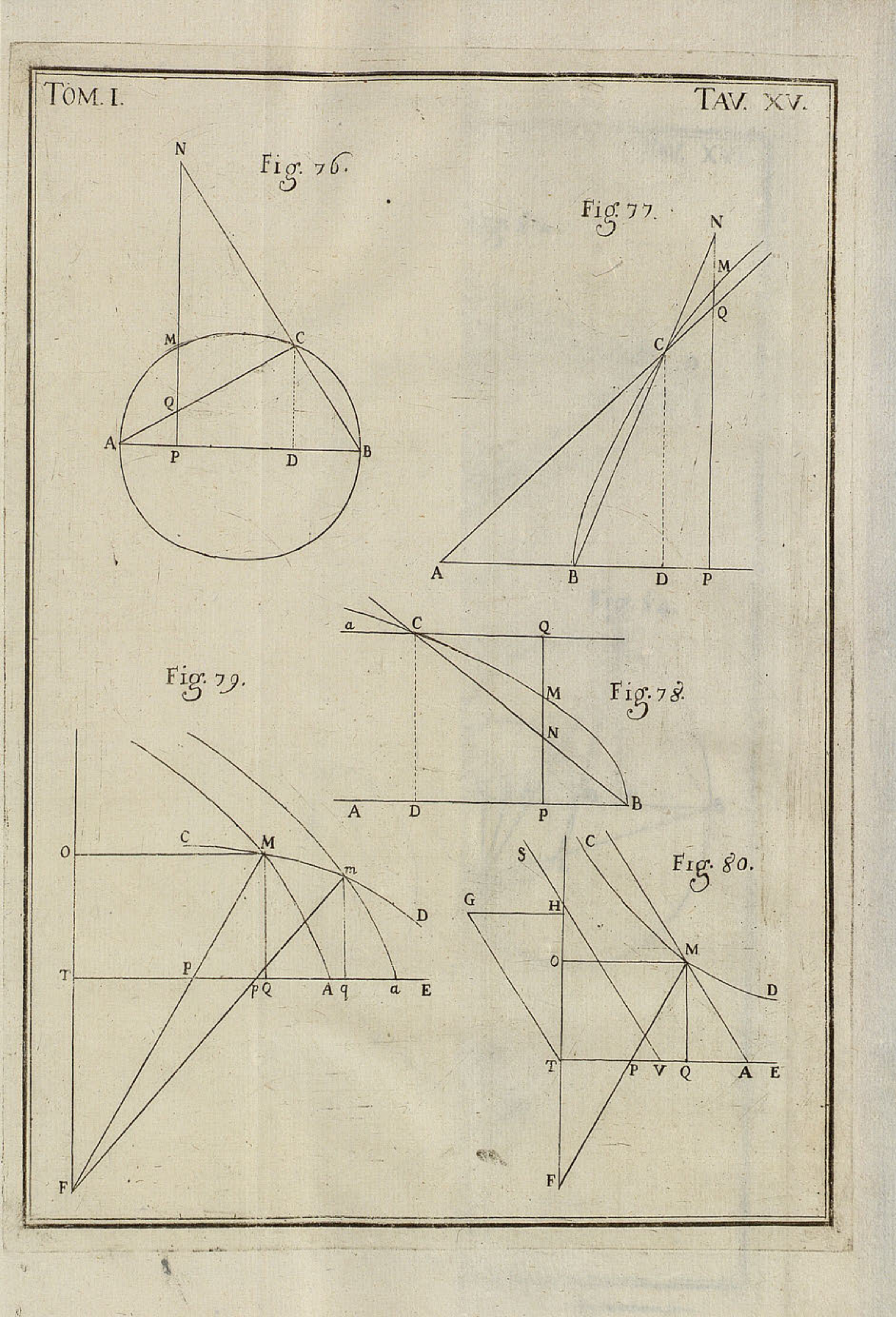

Fig. 62.
P
H
H
Q
E
C
A
D
B
D
E
Q
H
P
H
Fig. 63.
L
B
F
g
C
g F C H
E
I
B
d d A D P D
b
i
c M G
h
c
G
M
b
l
Fig. 64.
T
R
N
B
A
C
F
G
E
H
K
D P Q
T
M
R

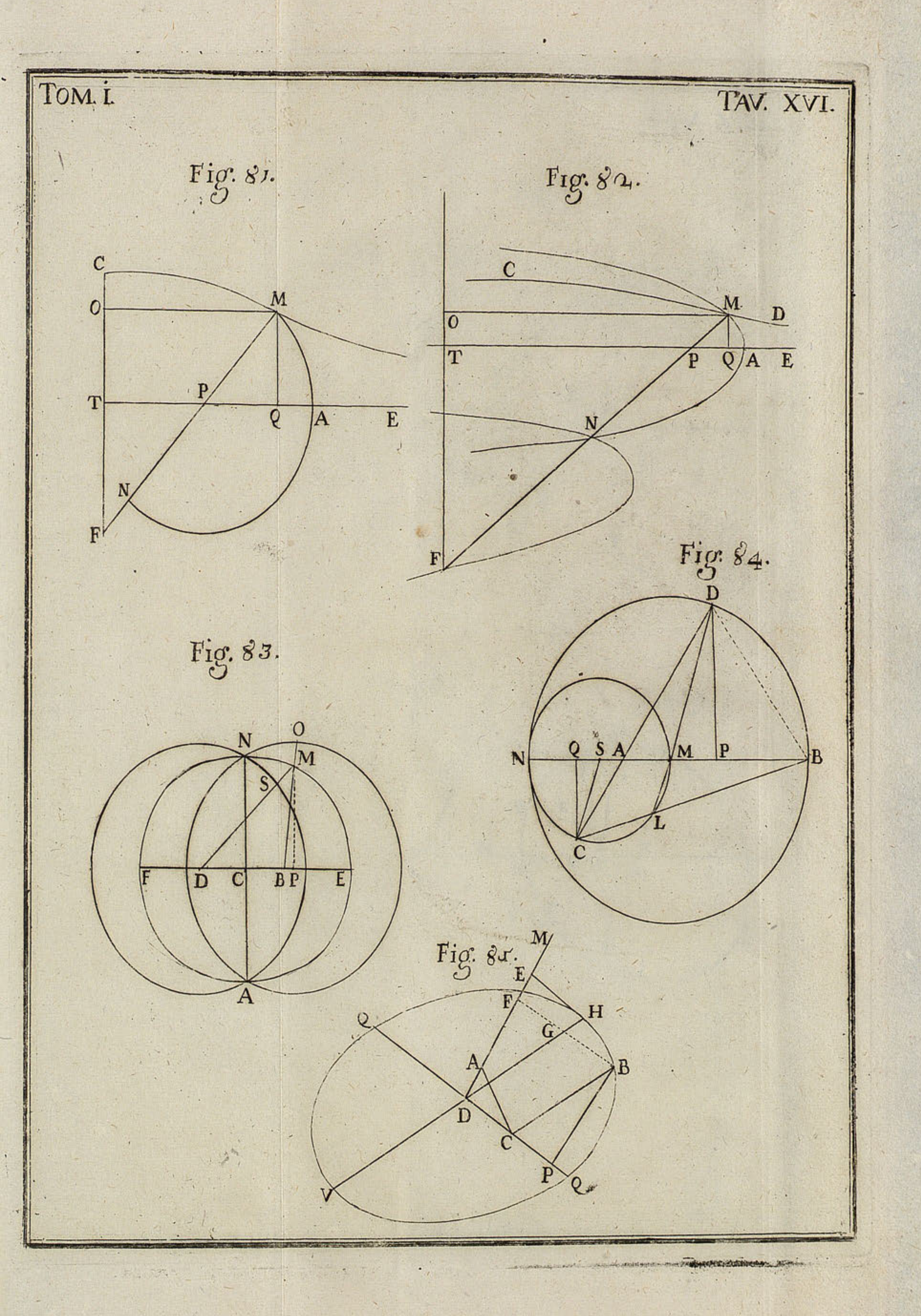



Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.

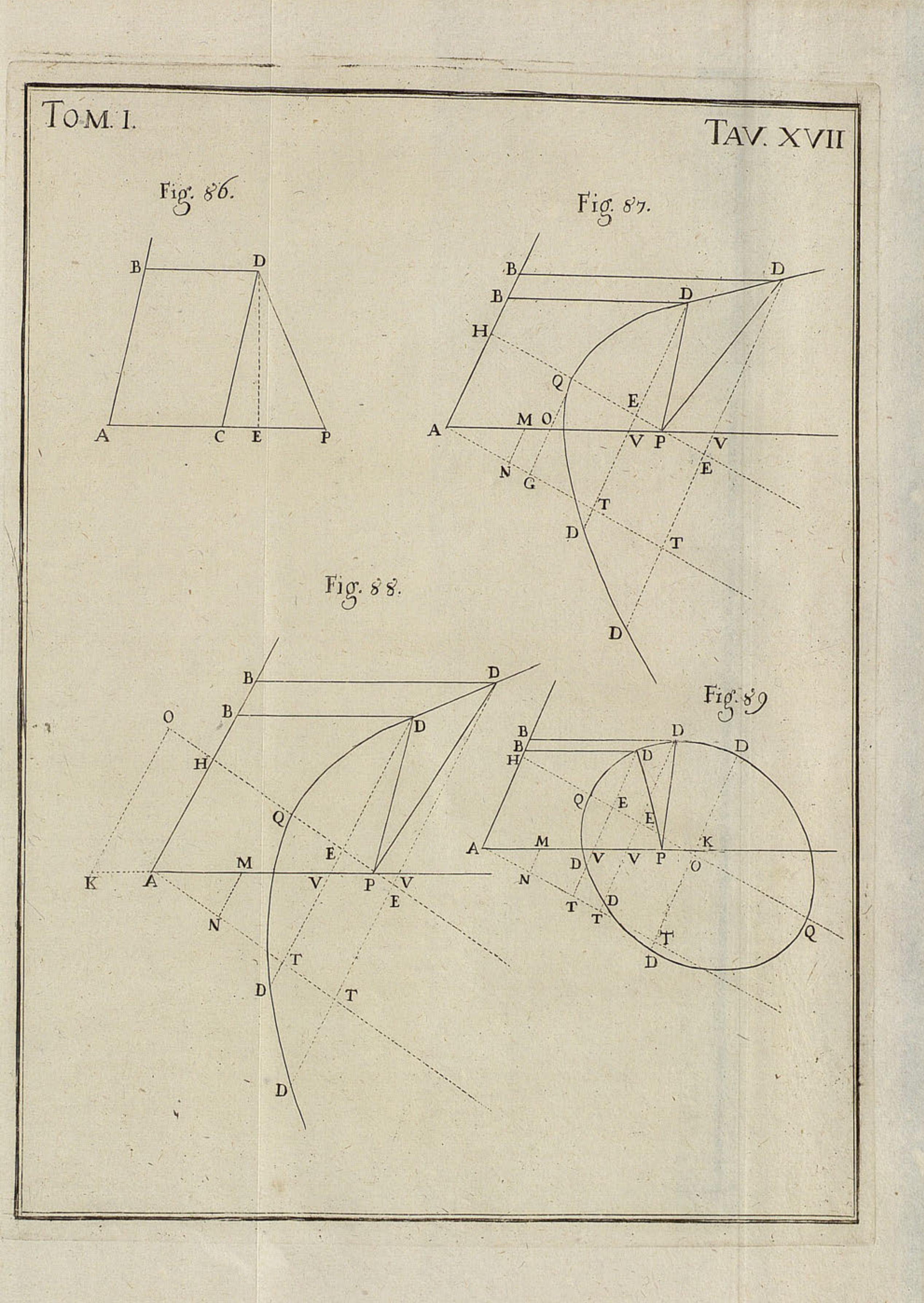

Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
T
q
o
R
P
M
e
D
Q
B
C
N
H
A
E
O
b
F
G
L

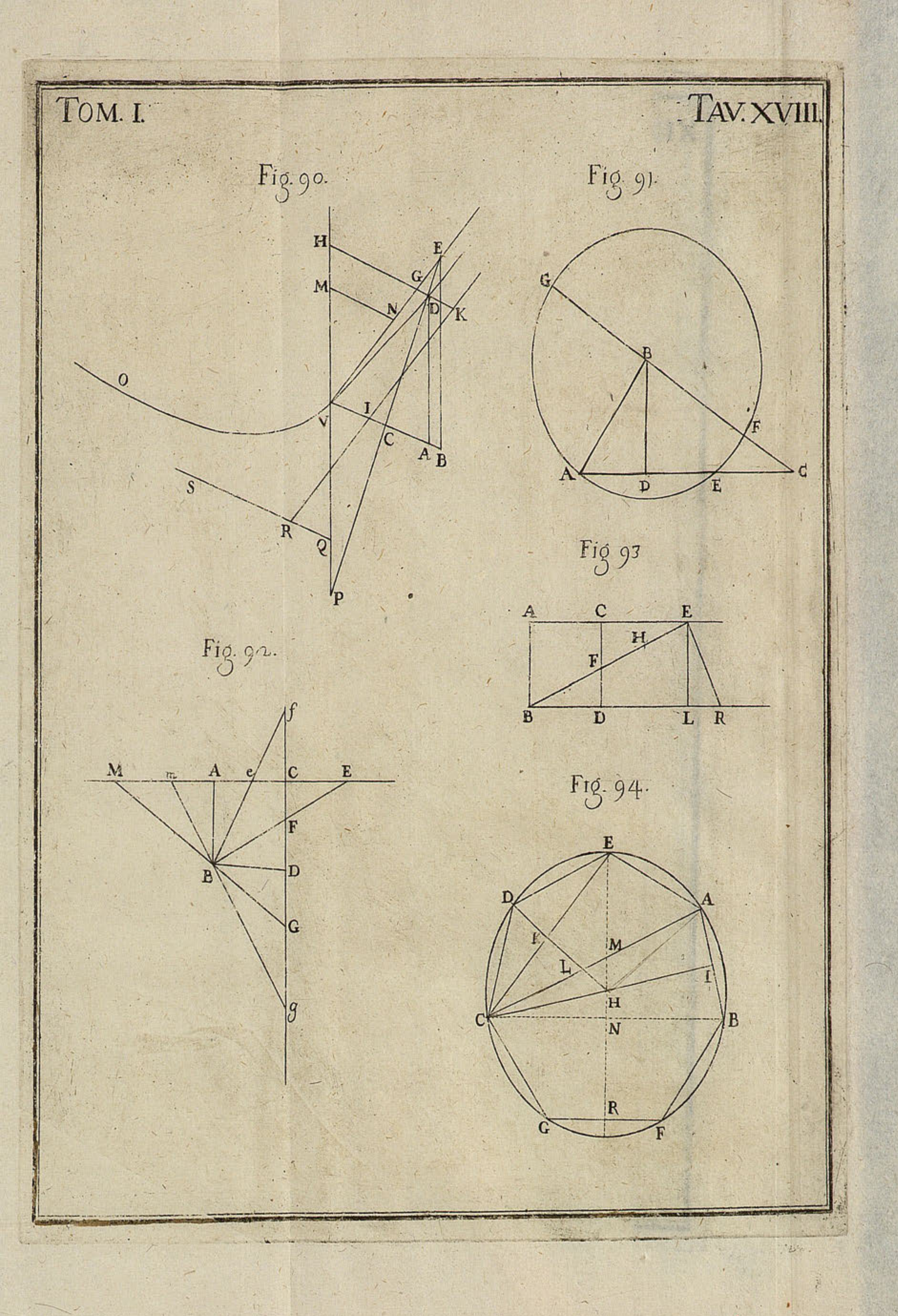

Fig. 71.
Fig. 73.
Fig. 75.
Fig. 72.
Fig. 74.


Fig. 76.
N
M
C
Q
A
P
D
B
Fig. 77.
N
M
Q
C
A
B
D
P
Fig. 78.
a
C
Q
M
N
A
D
P
B
Fig. 79.
C
O
M
m
D
T
P
p Q
A q
a
E
F
Fig. 80.
S
C
G
H
O
M
D
T
P V Q
A E
F

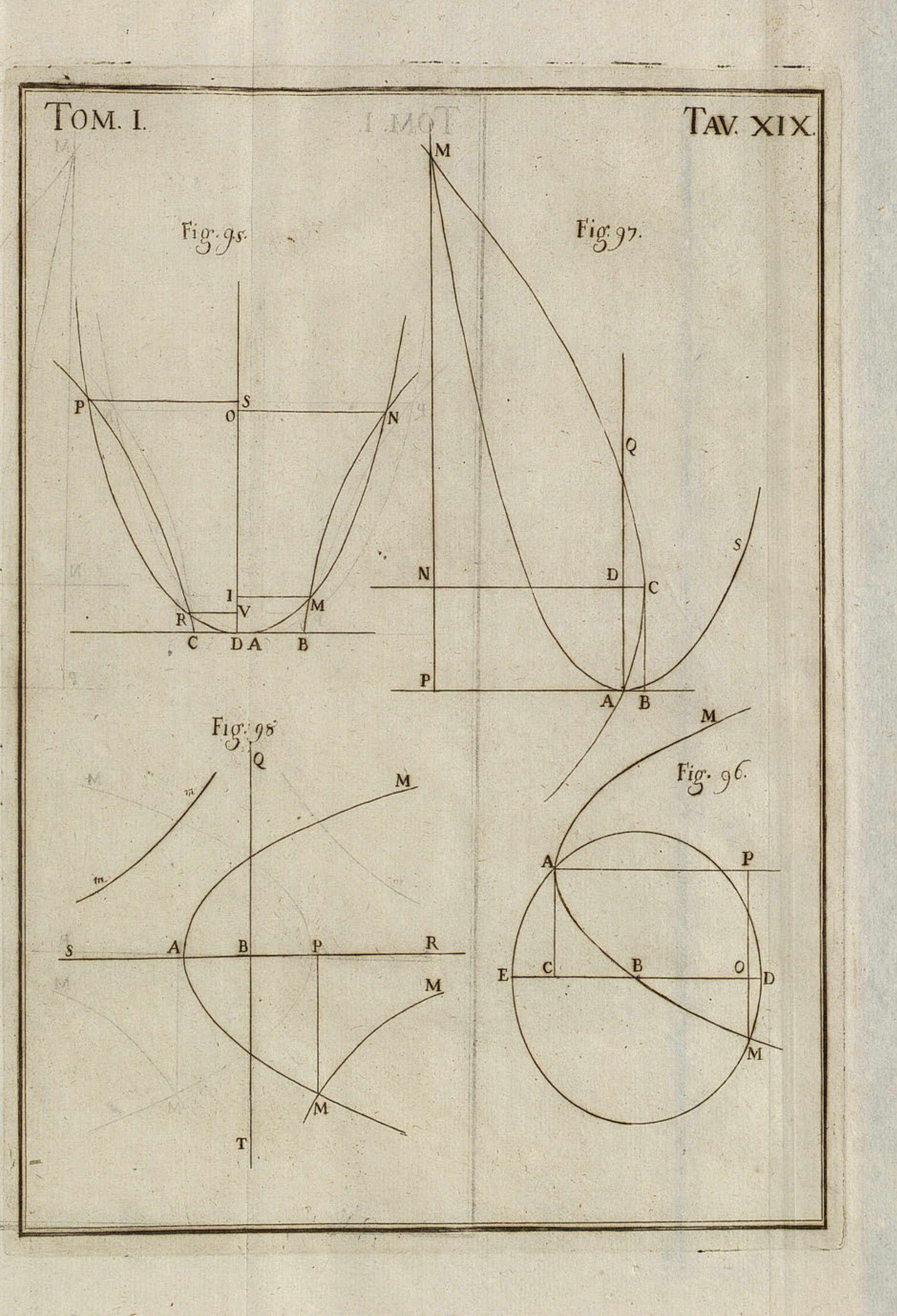


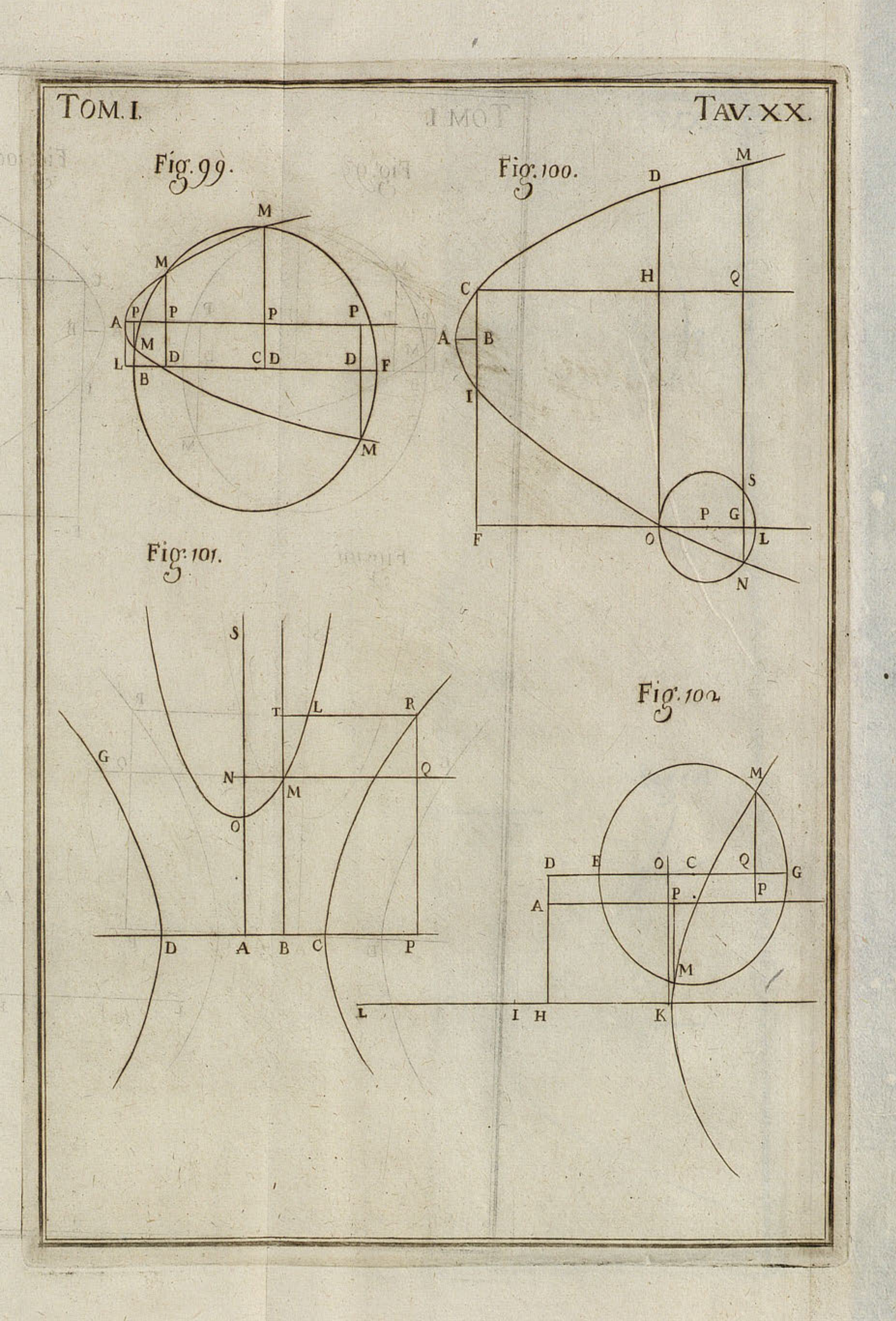
Tom. I.
Tav. XVI.
Fig. 81.
C
O
M
T
P
Q
A
E
N
F
Fig. 82.
C
M
D
O
T
P
Q
A
E
N
F
Fig. 83.
N
O
M
S
F
D
C
B
P
E
A
Fig. 84.
D
N
Q
S
A
M
P
B
L
C
Fig. 85.
M
E
F
H
G
Q
A
B
D
C
P
Q
V

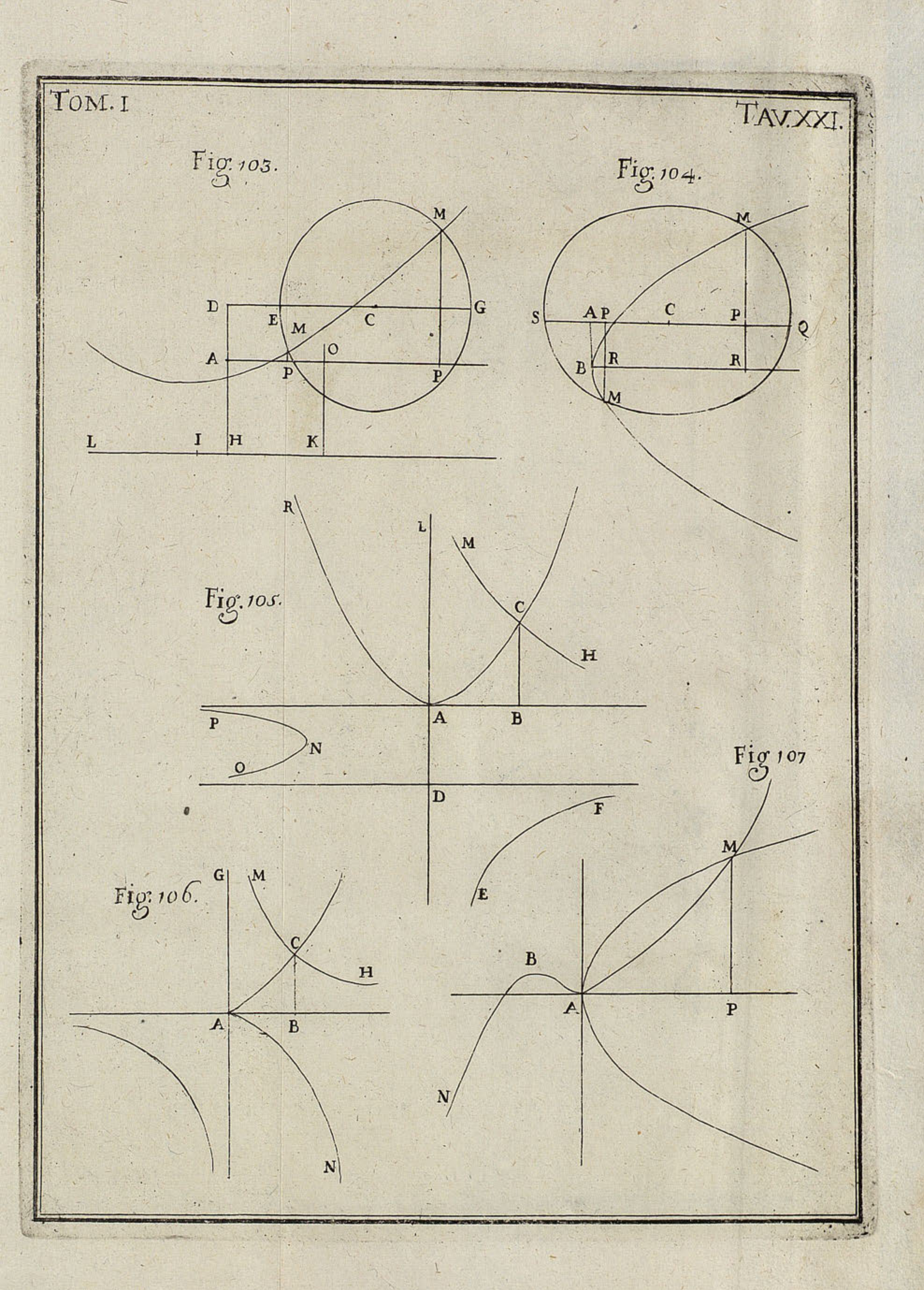

Tom. I.
Tav. XVII
Fig. 86.
B
D
A
C
E
P
Fig. 87.
B
D
B
D
H
Q
E
A
M
O
V
P
V
N
G
E
T
D
T
D
Fig. 88.
B
D
O
B
D
H
Q
E
M
K
A
V
P
V
E
N
T
D
T
D
Fig. 89
B
D
B
D
D
H
Q
E
E
A
M
K
D
V
V
P
O
N
D
T
T
T
Q
D

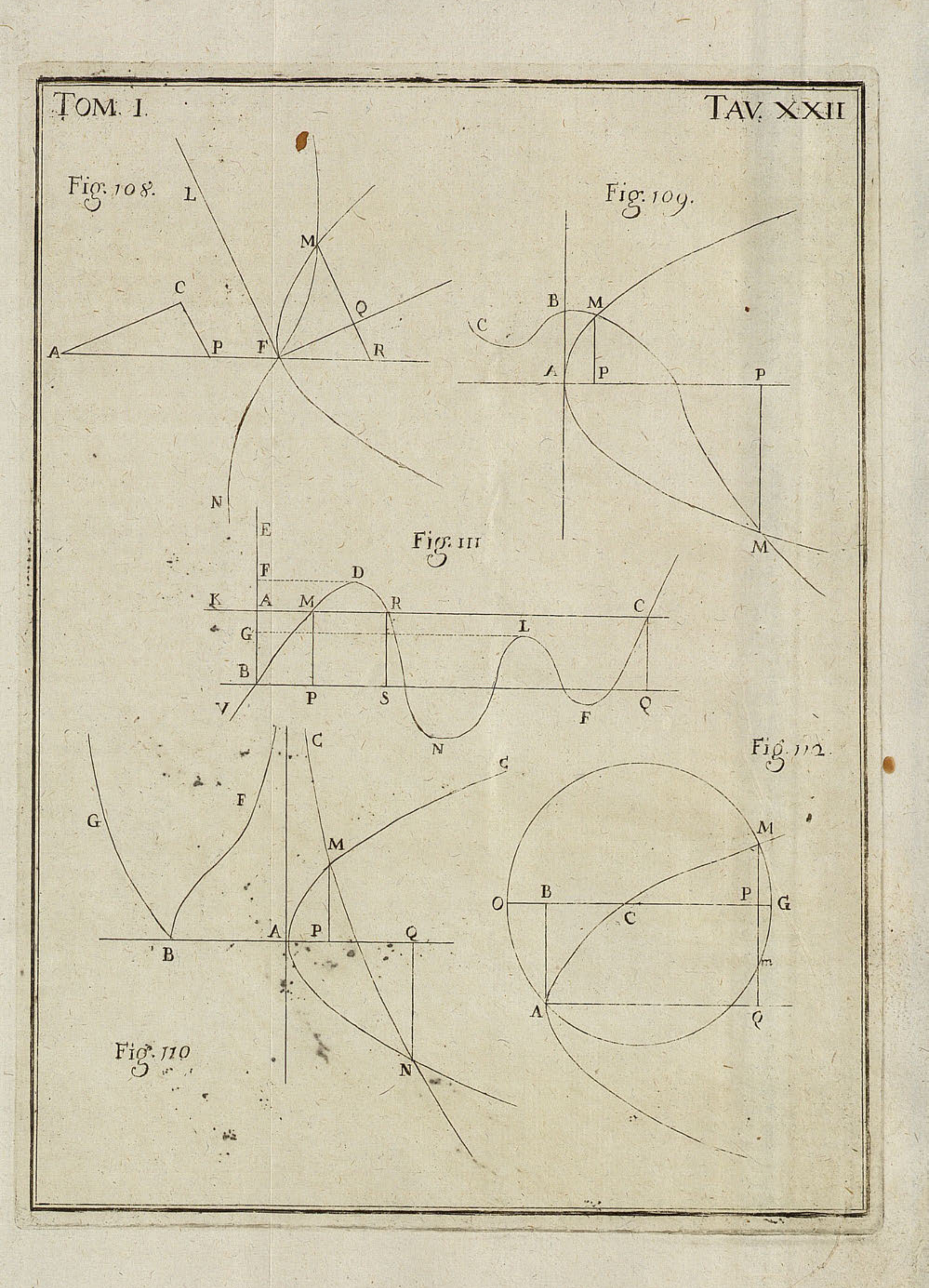


TOM. I.
TAV. XVIII.
Fig. 90.
H
E
G
M
N
D
K
O
V
I
C
A
B
S
R
Q
P
Fig. 91.
G
B
F
A
D
E
C
Fig. 92.
f
M
m
A
e
C
E
F
B
D
G
g
Fig. 93
A
C
E
H
F
B
D
L
R
Fig. 94.
E
D
A
M
L
I
H
C
N
B
R
G
F

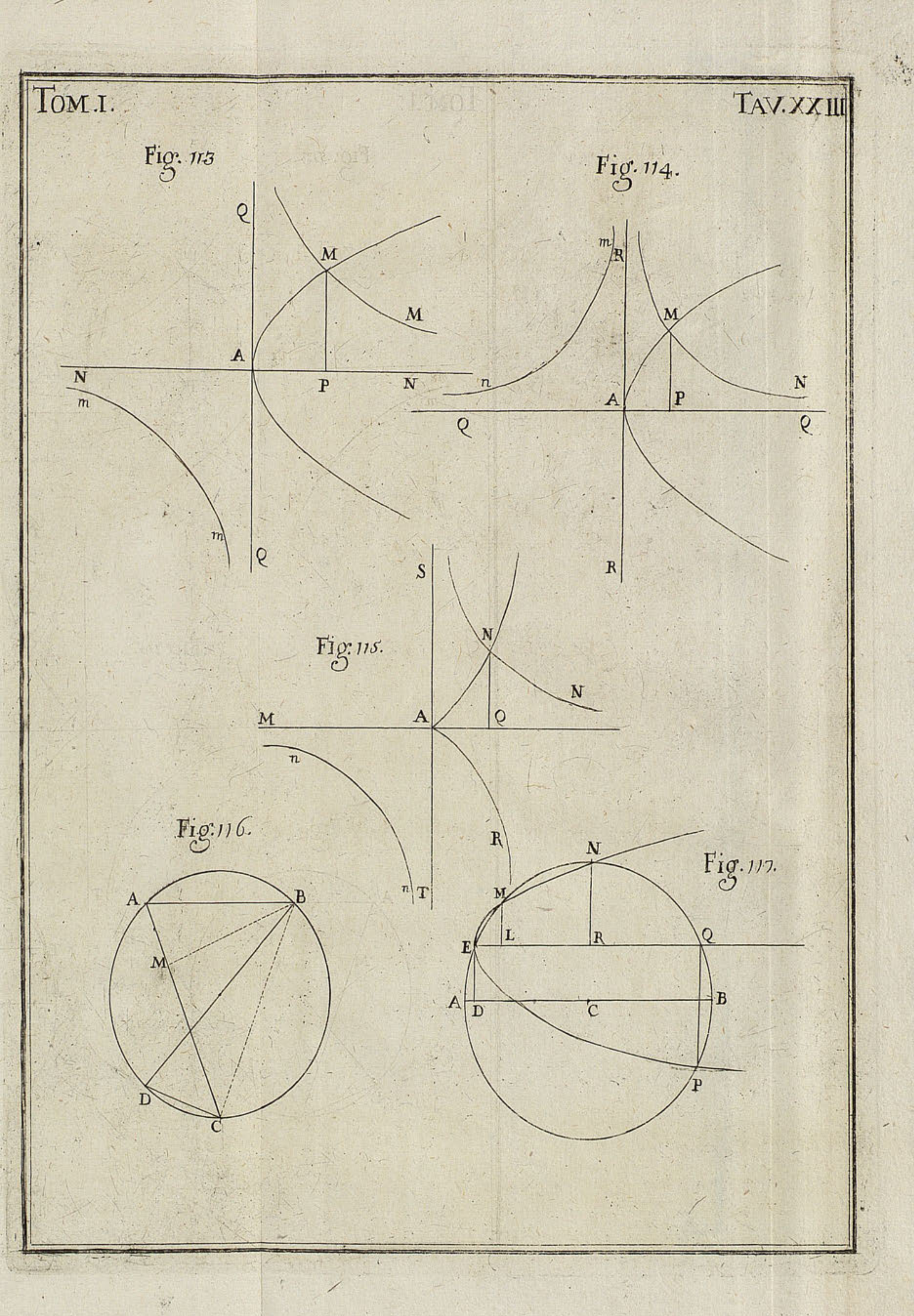

Fig. 95.
P
S
O
N
I
V
M
R
C
D A
B
Fig. 97.
M
Q
S
N
D
C
P
A
B
Fig. 98.
Q
M
m
m
S
A
B
P
R
M
M
T
Fig. 96.
M
A
P
E
C
B
O
D
M

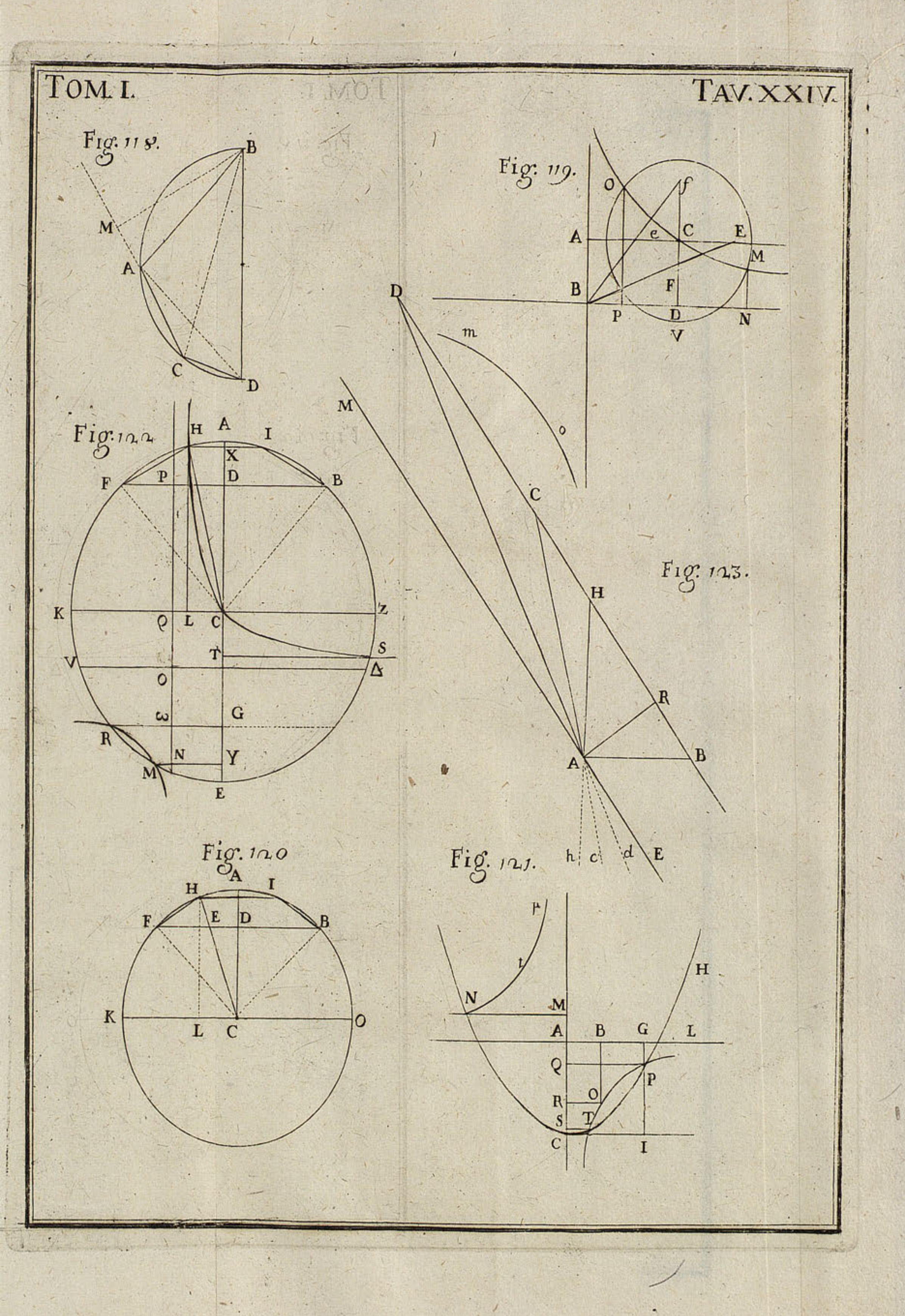

Fig. 99.
M
M
A P P P P
M
L D C D D F
B
M
Fig. 100.
M
D
H Q
C
A B
I
S
P G
F O L
N
Fig. 101.
S
T L R
G
N Q
M
O
D A B C P
Fig. 102.
M
D E O C Q G
P . P
A
M
L I H K

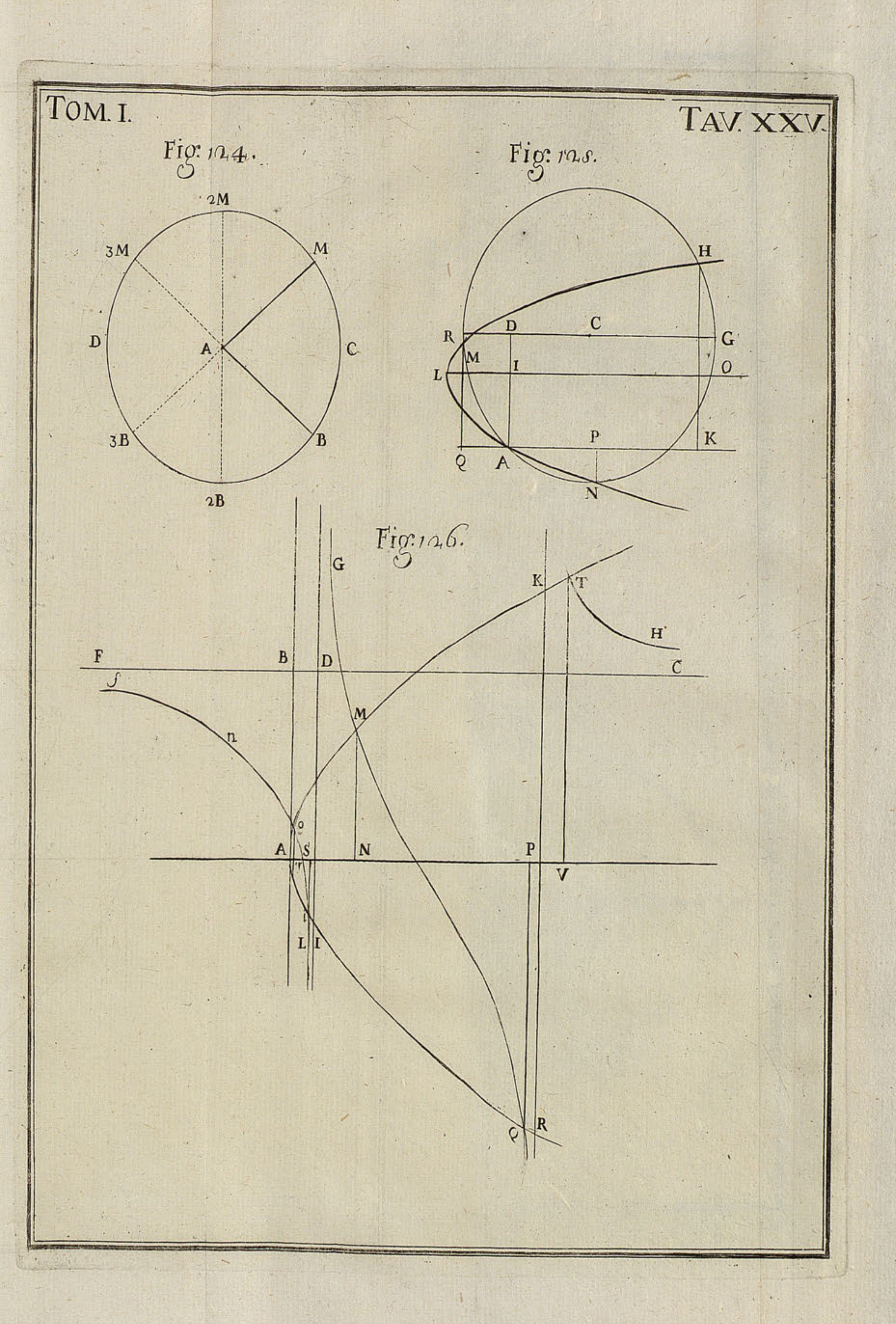

Tom. I
Tav.XXI.
Fig. 103.
M
D
E
M
C
G
A
O
P
P
L
I
H
K
Fig. 104.
M
S
A P
C
P
Q
B
R
R
M
Fig. 105.
R
L
M
C
H
A
B
P
N
O
D
Fig. 106.
G
M
C
H
A
B
N
Fig 107
F
E
M
B
A
P
N

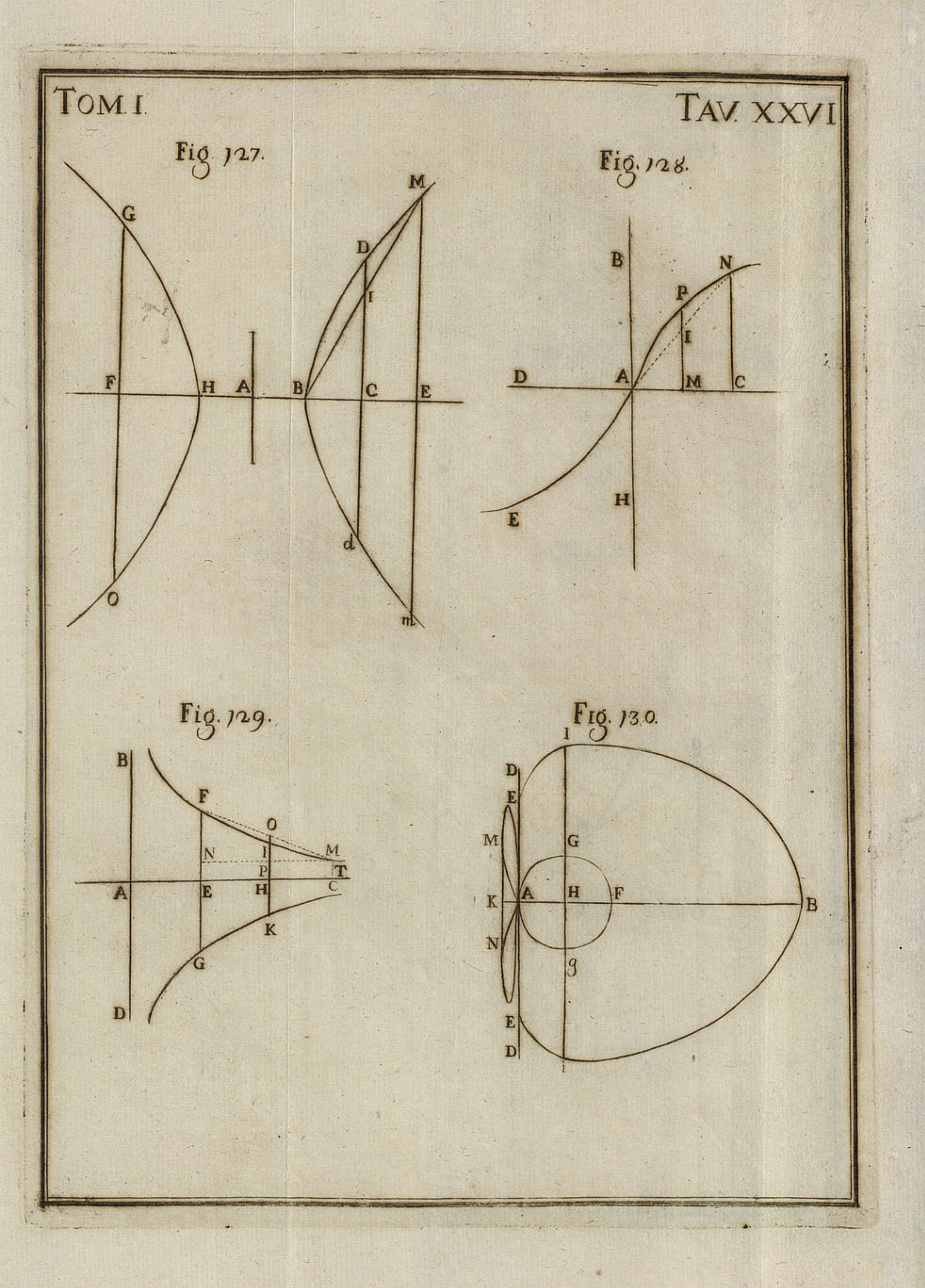


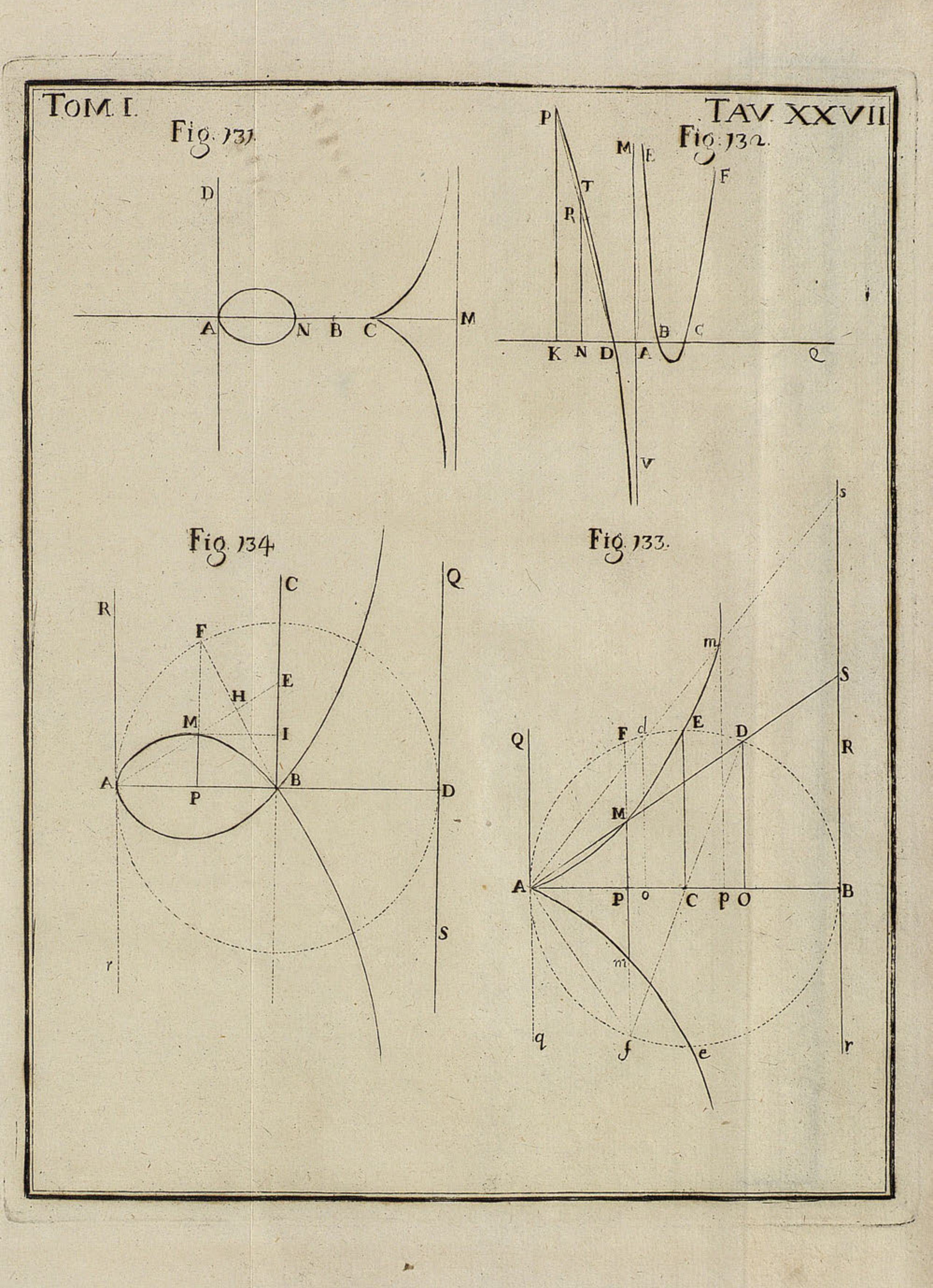
TOM. I.
TAV. XXII
Fig. 108.
L
M
C
Q
A
P
F
R
N
Fig. 109.
B
M
C
A
P
P
M
Fig. 111
E
F
D
K
A
M
R
C
G
L
B
P
S
Q
V
F
N
Fig. 112.
C
C
G
F
M
A
P
Q
B
N
Fig. 110
M
O
B
P
G
C
m
A
Q


Tom. I.
Tav. XXIII
Fig. 113
Q
M
M
A
N
P
N
m
m
Q
Fig. 114.
m
R
M
N
n
A
P
Q
Q
R
Fig. 115.
S
N
N
M
A
Q
n
R
n
T
Fig. 116.
A
B
M
D
C
Fig. 117.
N
M
L
R
Q
E
A
D
C
B
P

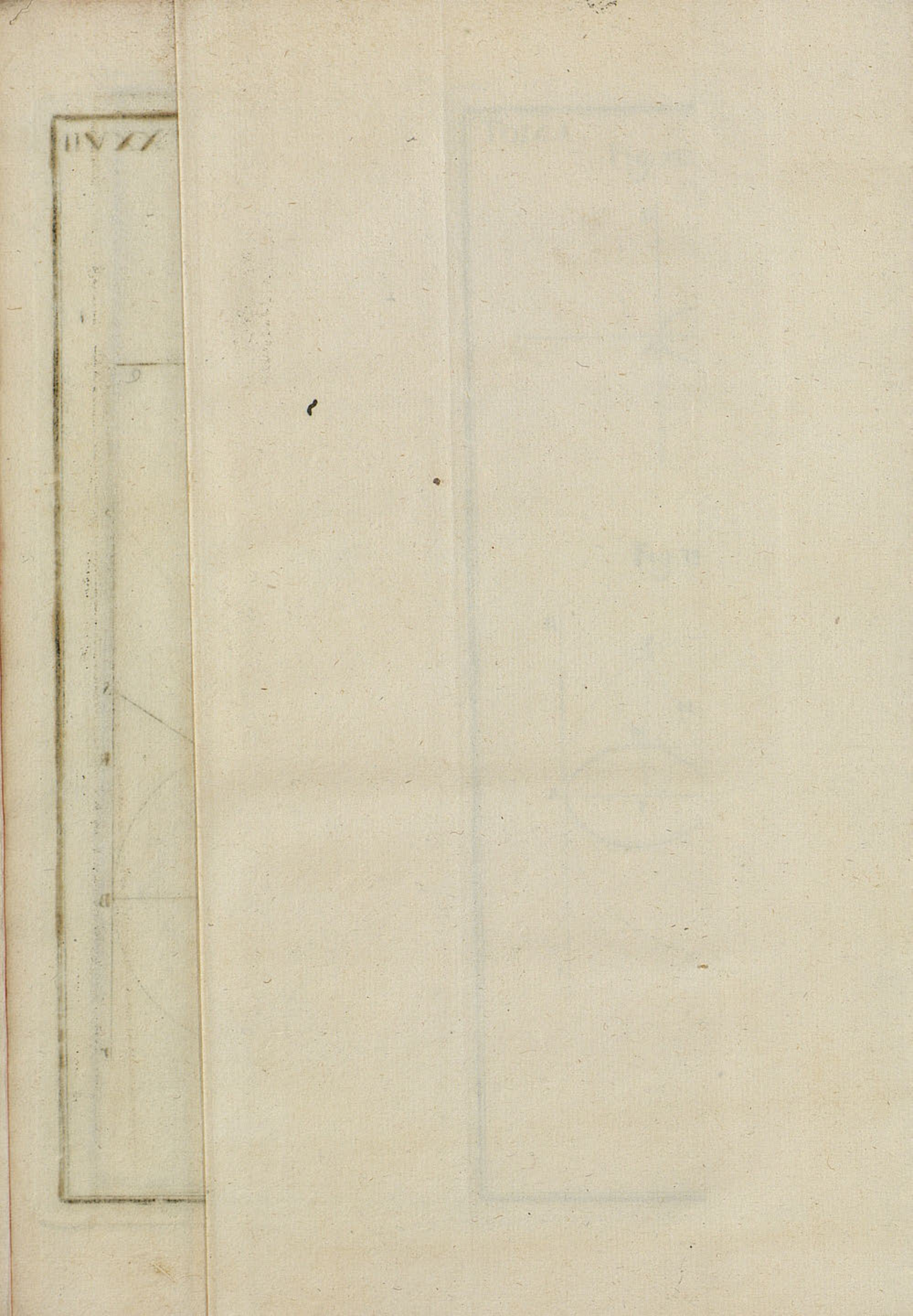

TOM. I.
TAV. XXIV.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 120
Fig. 121.

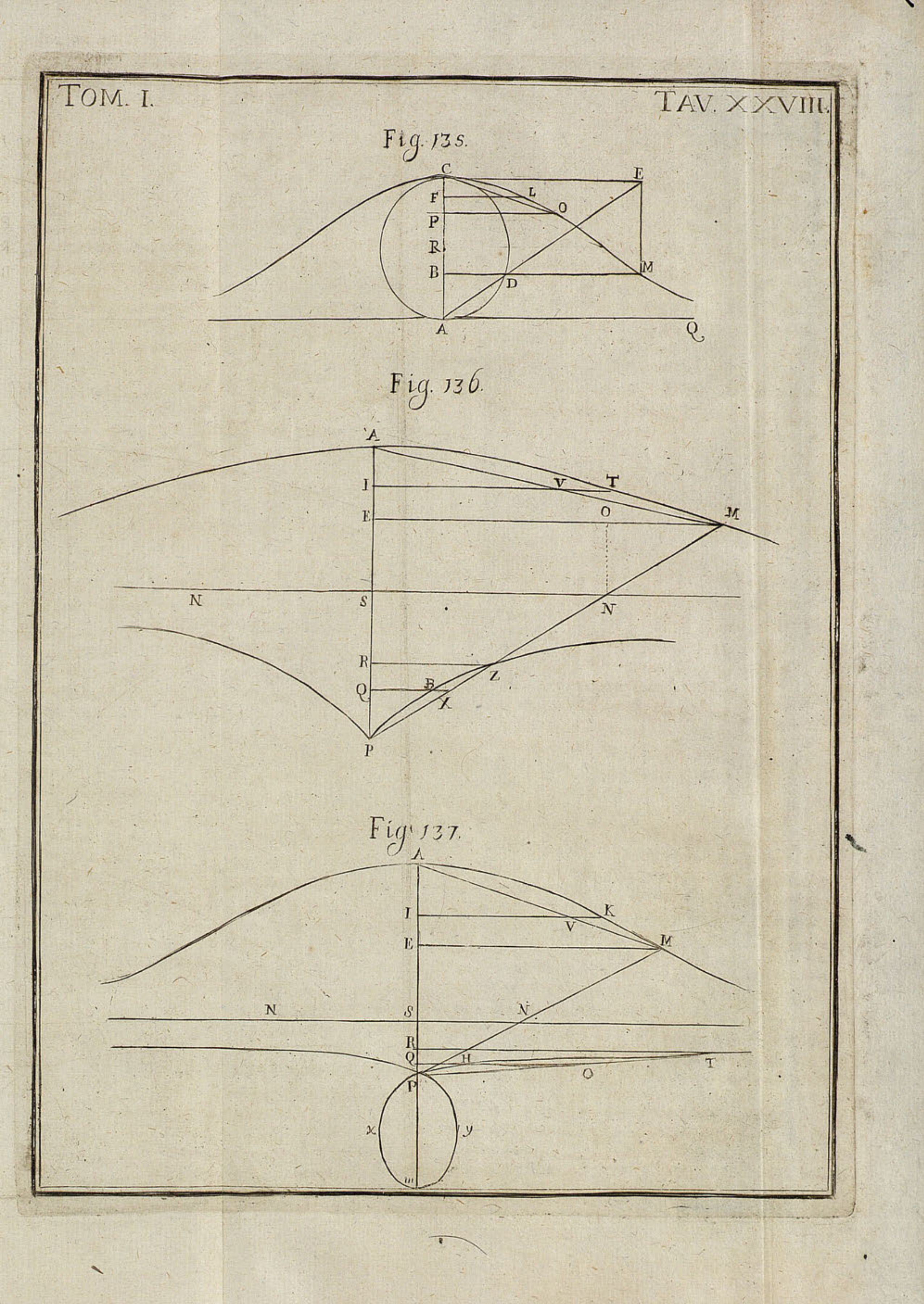

Fig. 124.
2M
3M
M
D
A
C
3B
B
2B
Fig. 125.
H
R
D
C
G
M
I
L
O
P
K
Q
A
N
Fig. 126.
G
K
T
H
F
B
D
C
f
M
n
A
S
N
P
V
L
I
Q
R


Fig. 127.
G
F
H
A
B
C
E
D
I
M
d
m
O
Fig. 128.
B
N
P
I
D
A
M
C
H
E
Fig. 129.
B
F
O
N
I
M
P
T
A
E
H
C
K
G
D
Fig. 130.
I
D
E
M
G
K
A
H
F
B
N
g
E
D
i

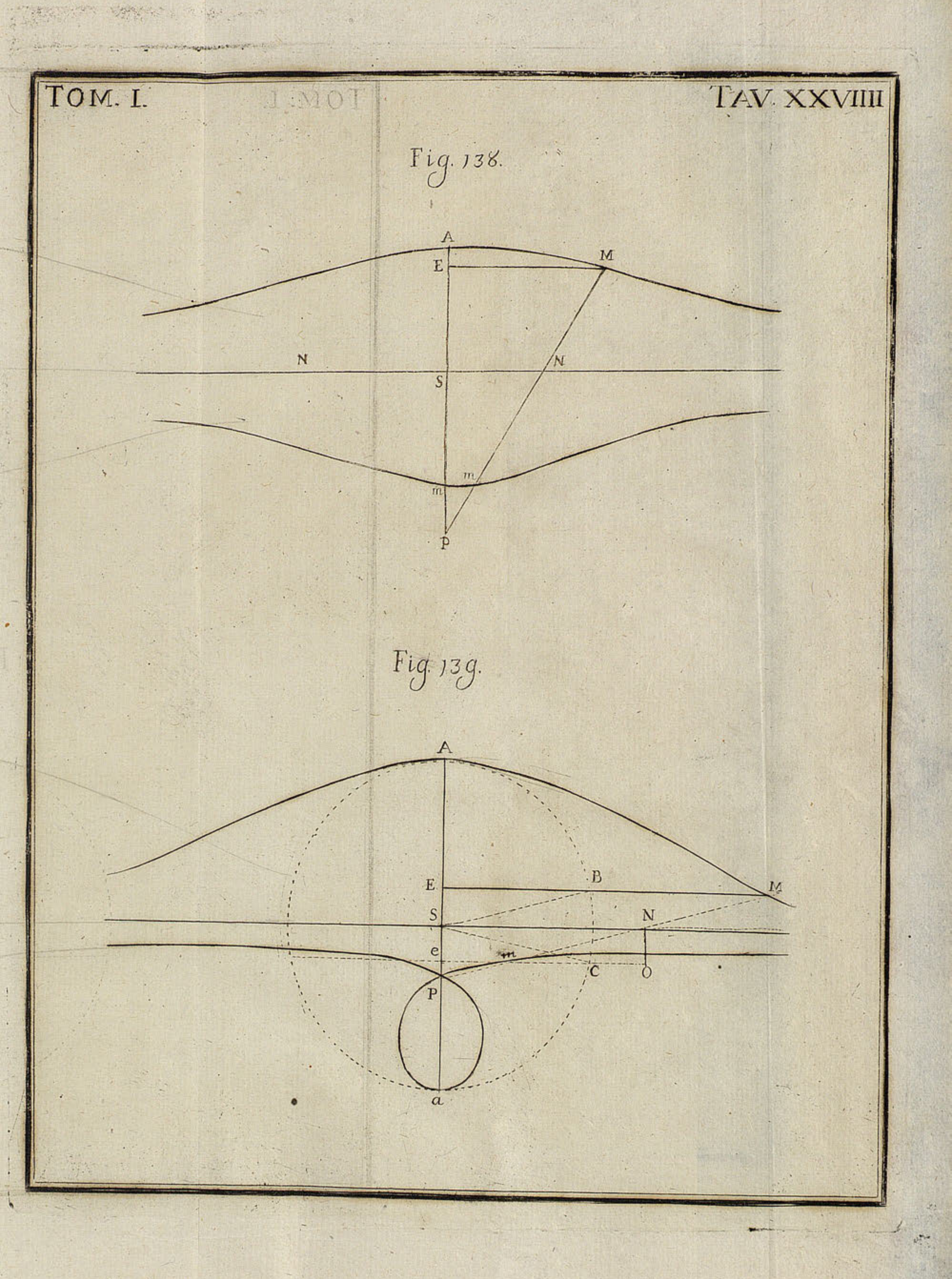


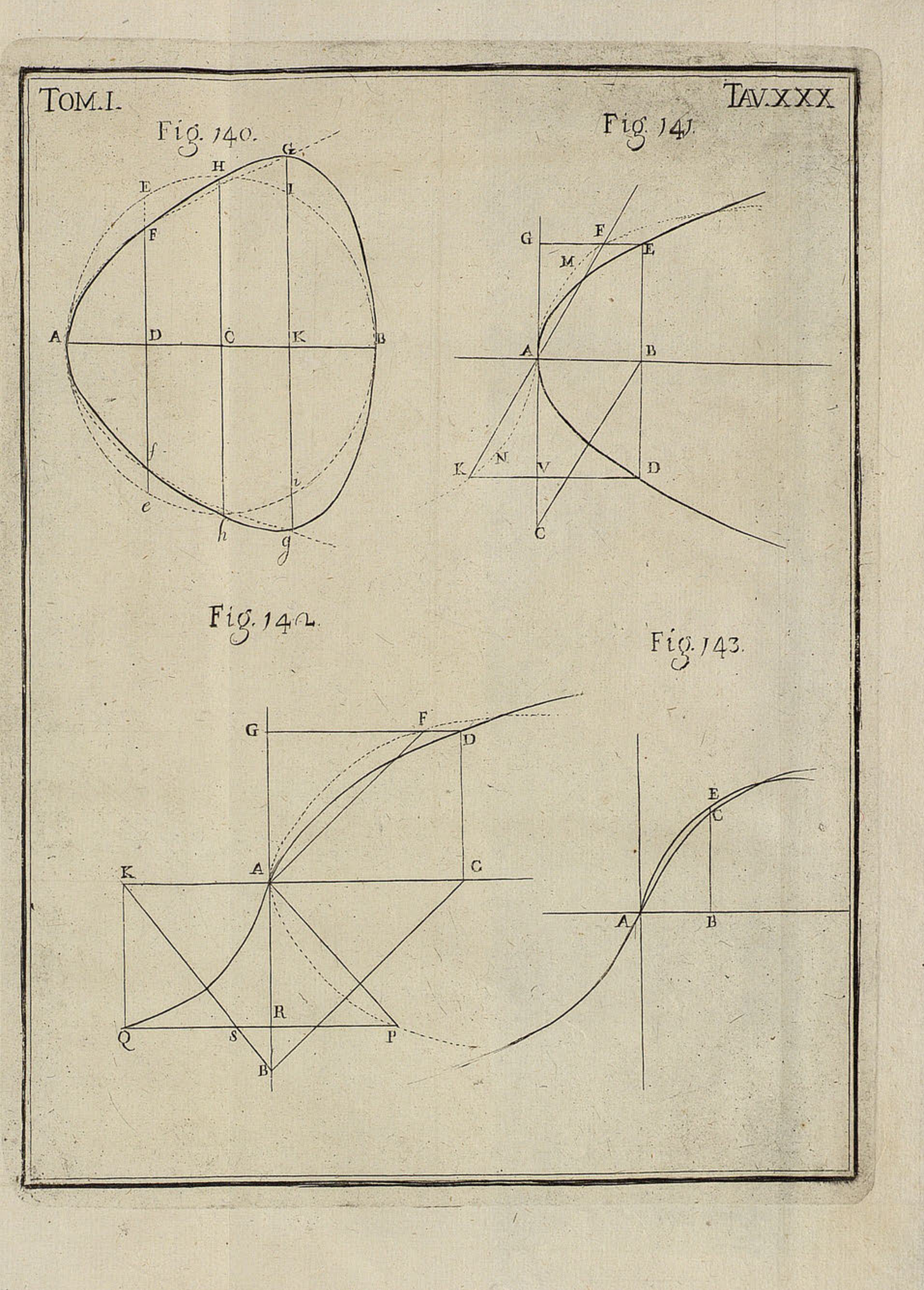
TOM. I.
TAV. XXVII
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 134
Fig. 133.

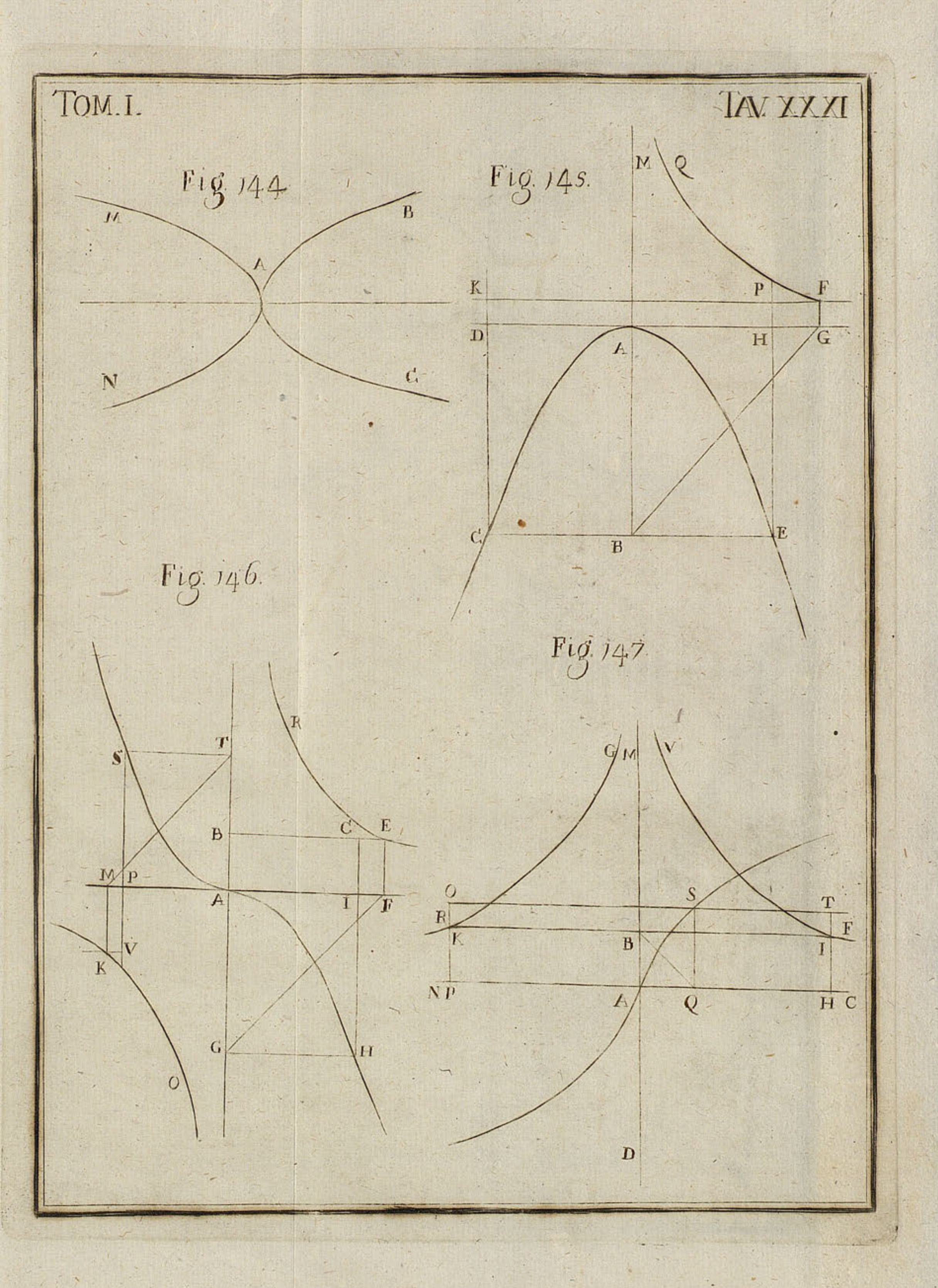


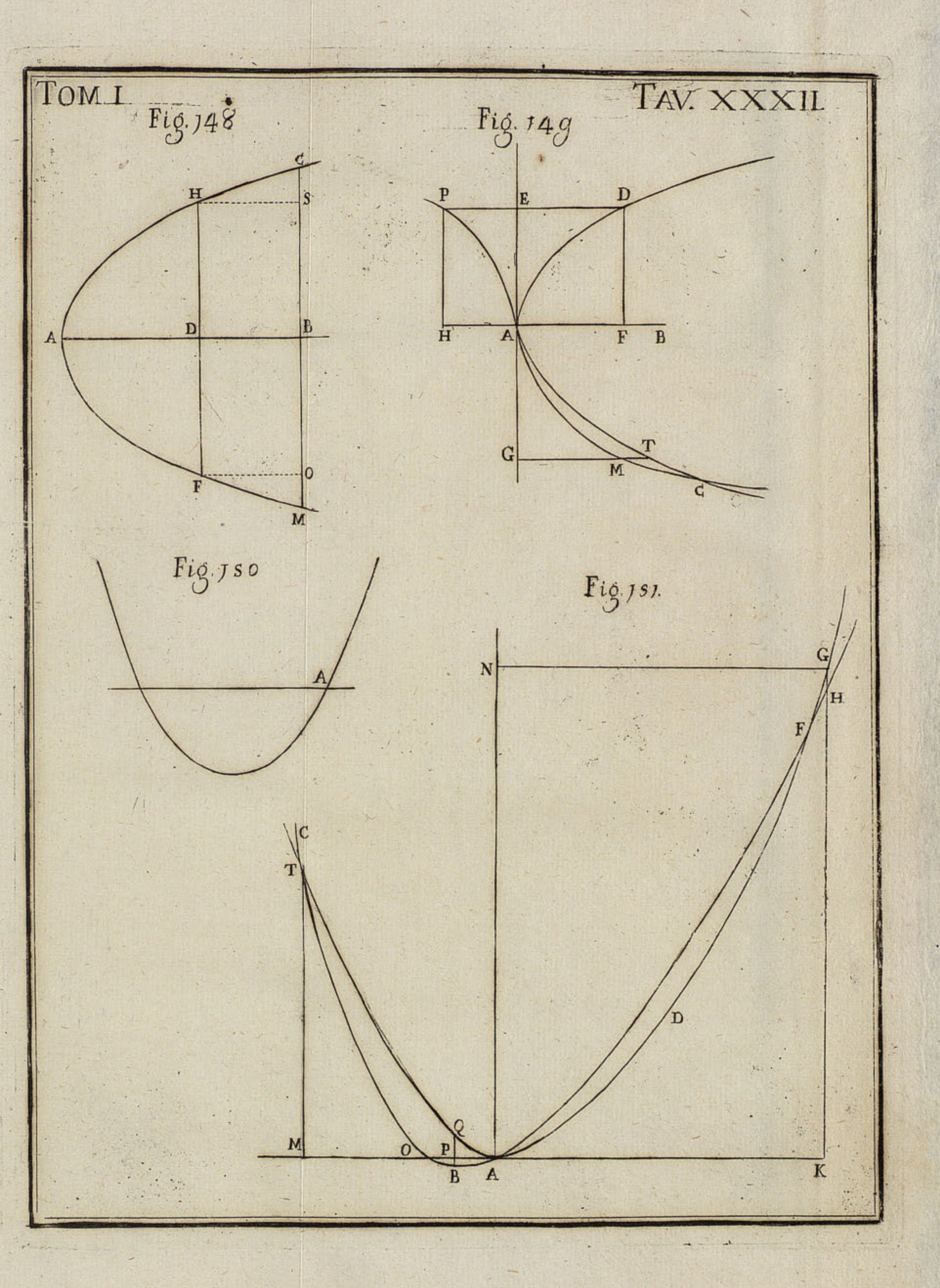


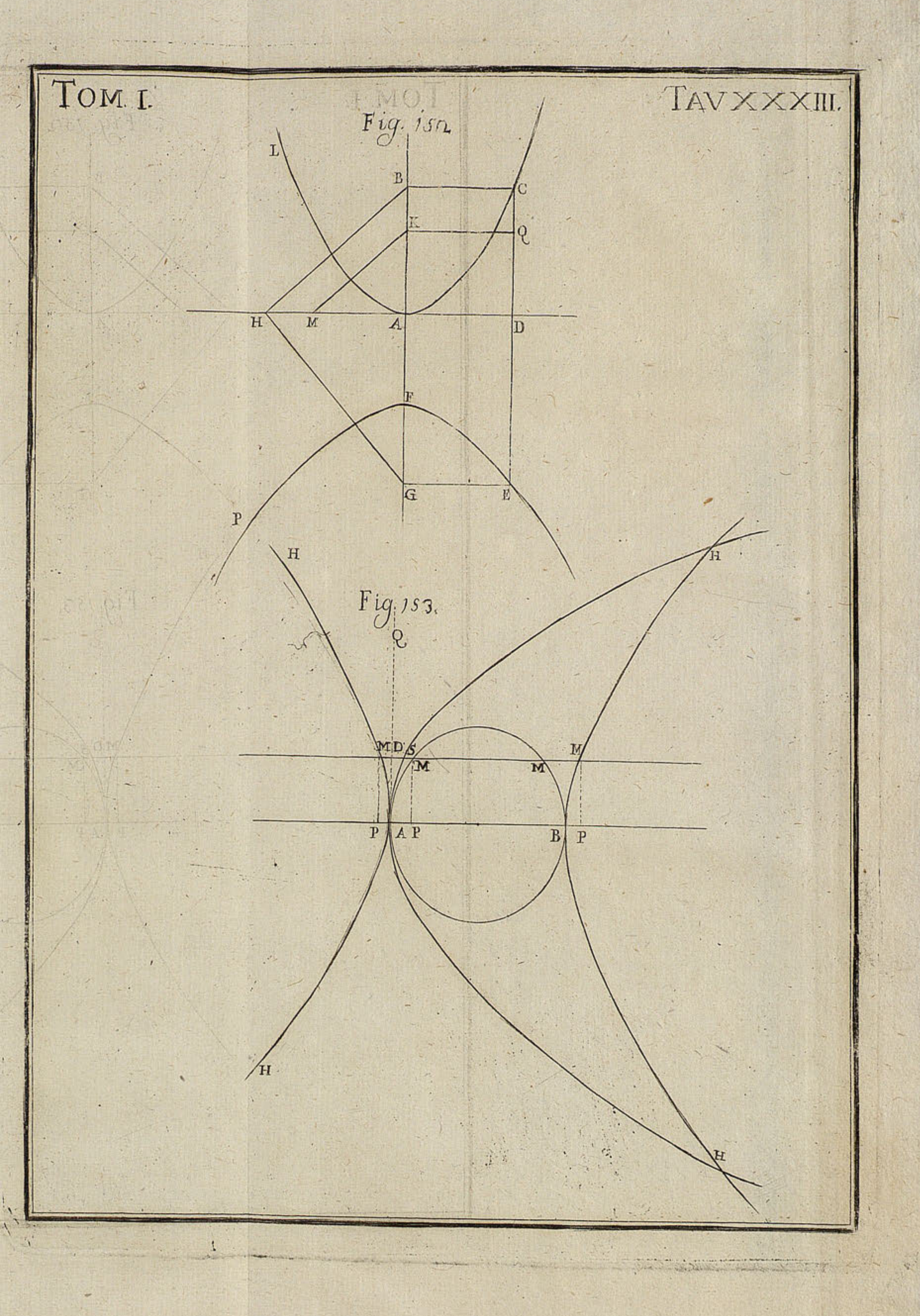
TOM. I.
TAV. XXVIII.
Fig. 135.
C
E
F
L
O
P
R
B
M
D
A
Q
Fig. 136.
A
I
V
T
E
O
M
N
S
N
R
Z
Q
B
X
P
Fig. 137.
A
I
K
V
E
M
N
S
N
R
Q
H
T
O
P
x
y
m


TOM. I.
TAV. XXVIIII
Fig. 138.
A
E
M
N
S
N
m
m
P
Fig. 139.
A
E
B
M
S
N
e
m
C
O
P
a

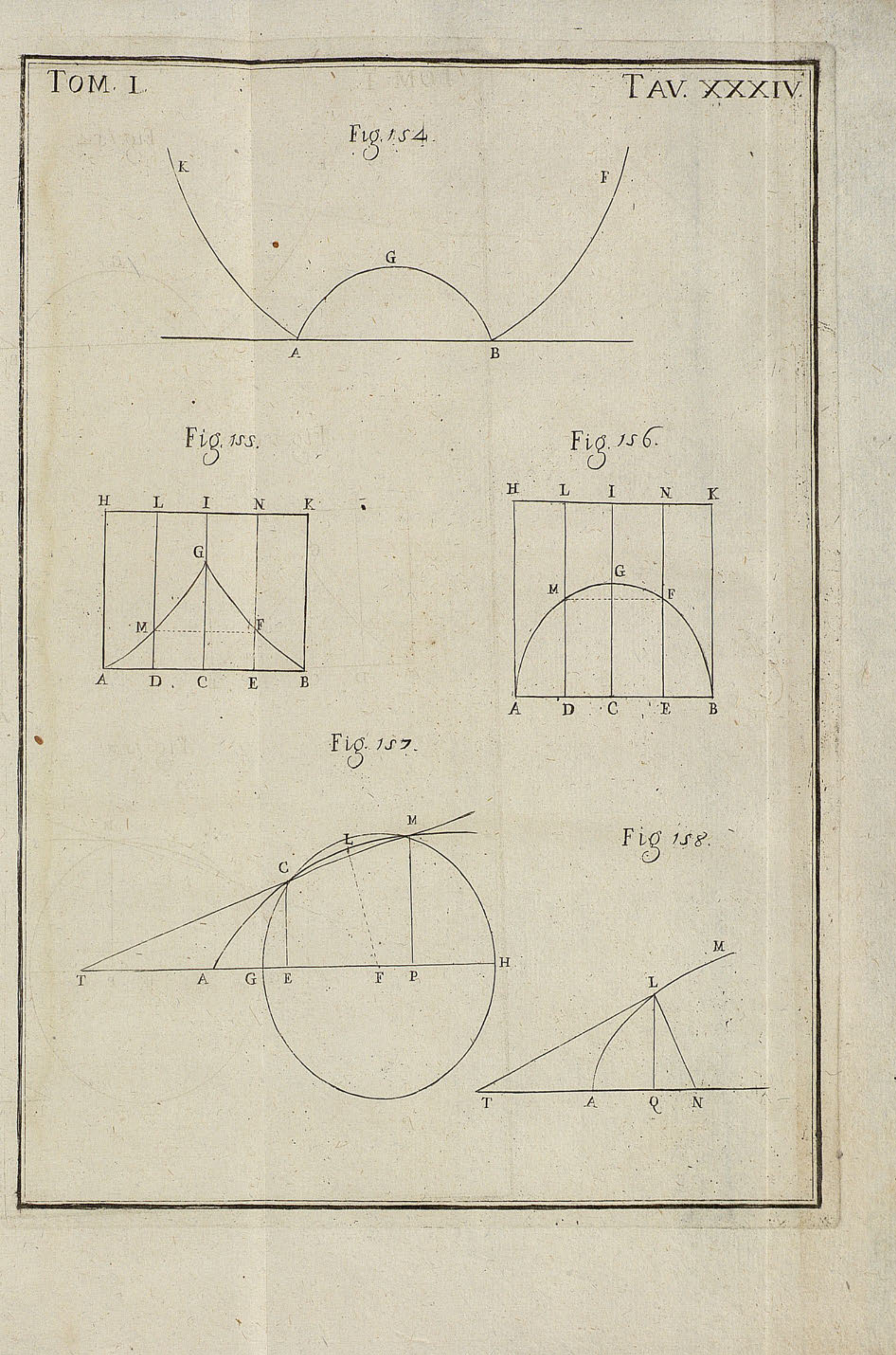

Fig. 140.
G
H
E
I
F
A
D
C
K
B
f
i
e
h
g
Fig. 141.
G
F
E
M
A
B
K
N
V
D
C
Fig. 142.
G
F
D
K
A
C
R
Q
S
P
B
Fig. 143.
E
C
A
B


Fig. 144
M
B
A
N
C
Fig. 145.
M
Q
K
P
F
D
H
G
A
C
B
E
Fig. 146.
R
S
T
B
C
E
M
P
A
I
F
V
K
G
H
O
Fig. 147
G
M
V
O
S
T
R
F
K
B
I
N P
A
Q
H C
D

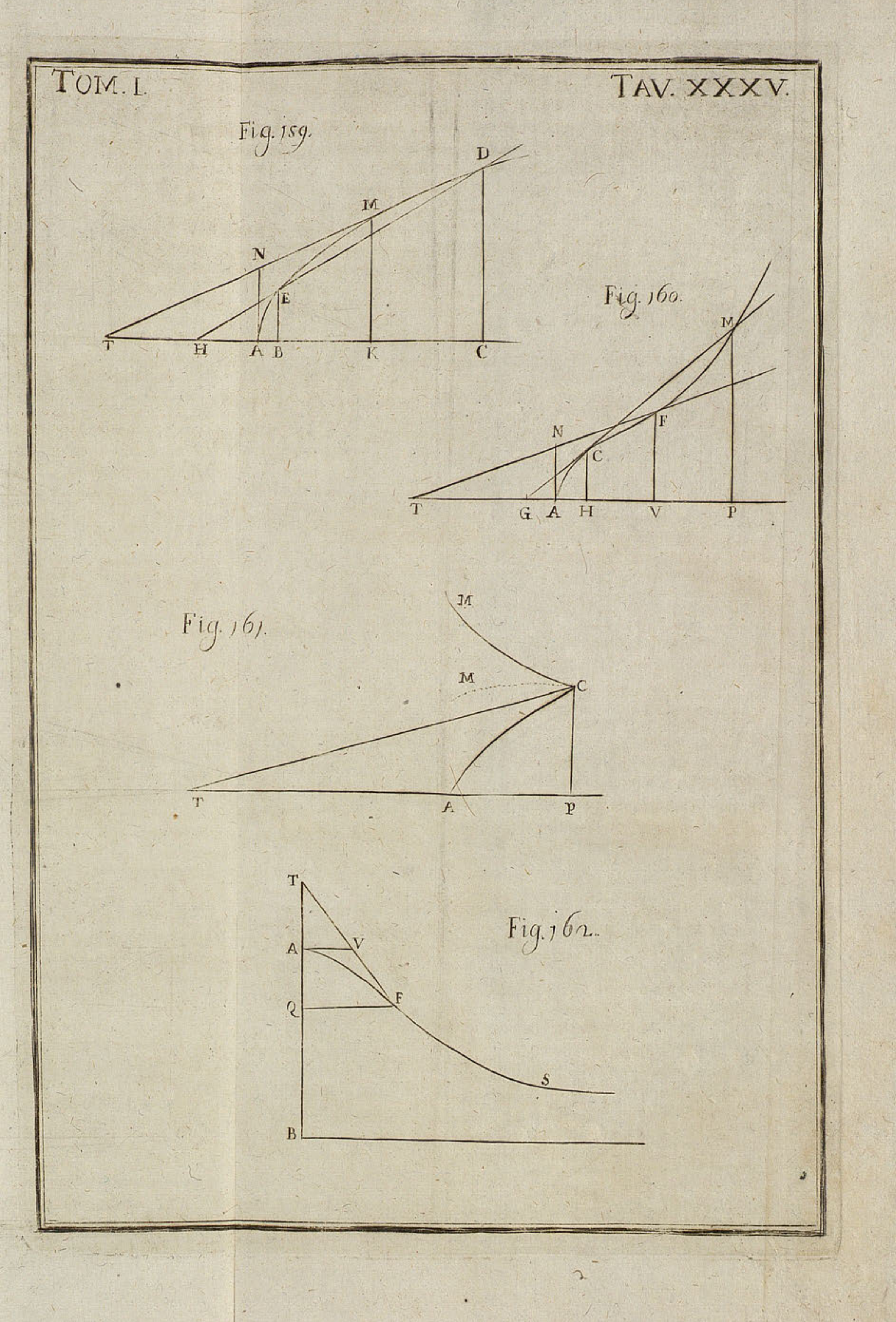

TOM. I.
TAV. XXXII.
Fig. 148
C
H
S
A
D
B
F
O
M
Fig. 149
P
E
D
H
A
F
B
G
T
M
C
Fig. 150
A
Fig. 151.
N
G
H
F
C
T
D
Q
M
O
P
B
A
K



TOM. I.
TAV XXXIII.
Fig. 152.
L
B
C
K
Q
H
M
A
D
F
G
E
P
Fig. 153.
H
H
Q
M
D
S
M
M
M
P
A
P
B
P
H
H

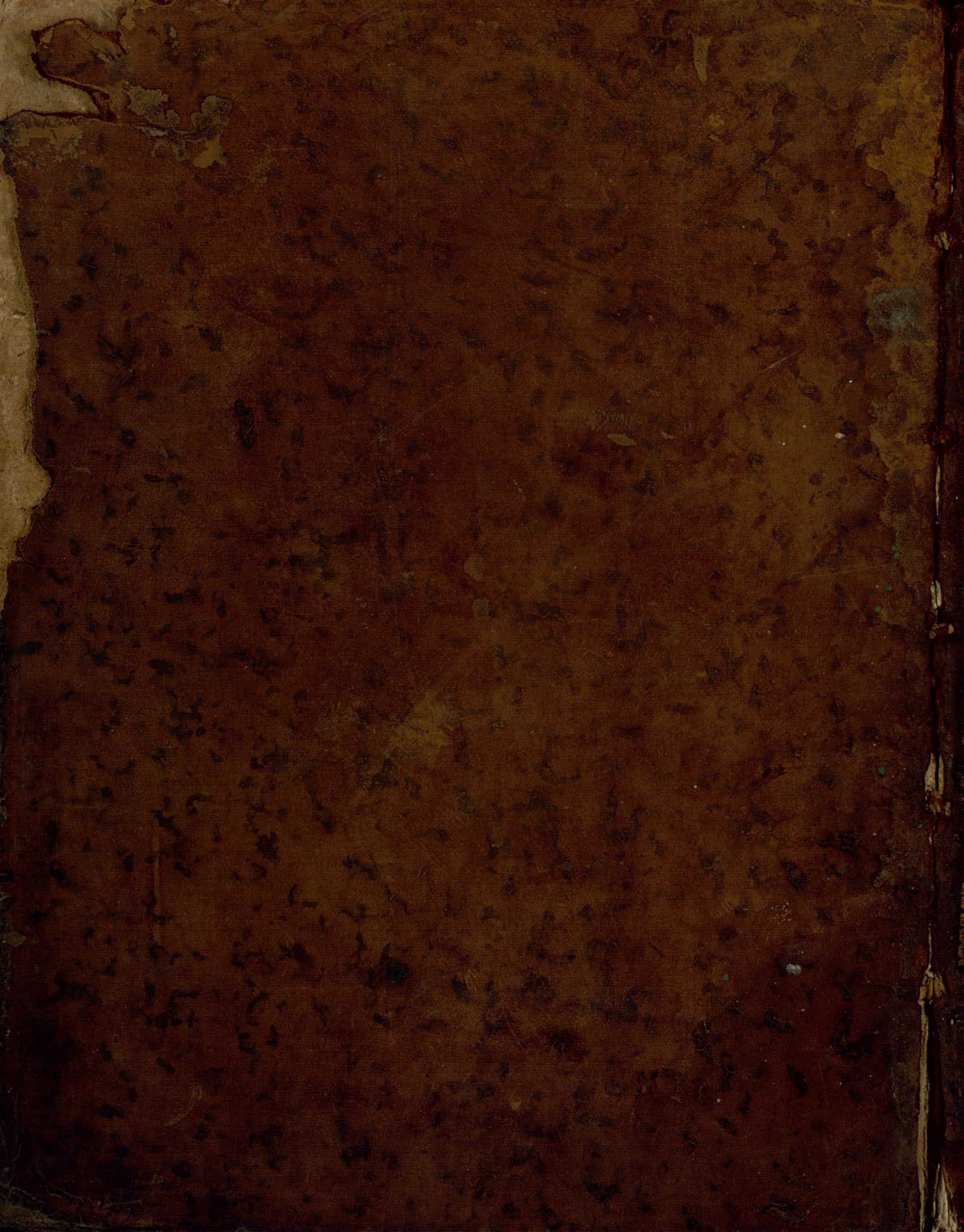


Tom. I.
Tav. XXXIV.
Fig. 154.
K
F
G
A
B
Fig. 155.
H L I N K
G
M
F
A D C E B
Fig. 156.
H L I N K
G
M
F
A D C E B
Fig. 157.
M
L
C
T A G E F P H
Fig 158.
M
L
T A Q N


TOM. I.
TAV. XXXV.
Fig. 159.
D
M
N
E
T
H
A
B
K
C
Fig. 160.
M
F
N
C
T
G
A
H
V
P
Fig. 161.
M
M
C
T
A
P
T
Fig. 162.
A
V
F
Q
S
B








298
INSTIT
ANALI
TOM. I